В ПОМОЩЬ ШКОЛЬНОМУ УЧИТЕЛЮ

В.А. ЯРОВЕНКО

# ПОУРОЧНЫЕ РАЗРАБОТКИ
## ПО ГЕОМЕТРИИ

*Дифференцированный подход*

**11 КЛАСС**

**В ПОМОЩЬ ШКОЛЬНОМУ УЧИТЕЛЮ**

# ПОУРОЧНЫЕ РАЗРАБОТКИ ПО ГЕОМЕТРИИ

**к учебному комплекту**
***Л.С. Атанасяна и др.***
**(*М.: Просвещение*)**

# 11 класс

МОСКВА • «ВАКО» • 2010

УДК 372.8:514
ББК 74.262.21
П64

Составитель выражает благодарность всем,
кто принимал участие в создании учебно-методического издания

П64 **Поурочные** разработки по геометрии: 11 класс / Сост. В.А. Яровенко. – М.: ВАКО, 2010. – 336 с. – (В помощь школьному учителю).

ISBN 978-5-408-00166-8

В подробных поурочных разработках по геометрии для 11 класса приводятся основные темы стереометрии – раздела геометрии, в котором изучаются свойства фигур в пространстве. Издание содержит варианты уроков, справочные и тестовые материалы, контрольные и самостоятельные работы, зачеты, карточки и вопросы для углубленного изучения геометрии.

Пособие адресовано прежде всего учителям, работающим с учебным комплектом Л.С. Атанасяна и др. (М.: Просвещение), также может полноценно использоваться с учебниками других авторов.

УДК 372.8:514
ББК 74.262.21

ISBN 978-5-408-00166-8

# ОТ СОСТАВИТЕЛЯ

Назначение данной книги состоит в том, чтобы помочь учителям в преподавании геометрии в 10–11 классах по учебнику Л.С. Атанасяна (М.: Просвещение).

В книге содержится поурочное планирование изучения учебного материала, сформулированы задачи уроков и даны примерные планы их проведения, приведены комментарии по наиболее важным вопросам теории, решения некоторых задач из учебника, тексты самостоятельных и контрольных работ, образцы слайдов, карточки-задания для проведения зачетов по разным темам.

Учителю следует исходить из того, что изучение курса стереометрии должно базироваться на сочетании наглядности и логической строгости. Опора на наглядность – непременное условие успешного усвоения материала, в связи с этим нужно уделить большое внимание правильному изображению на чертеже пространственных фигур. С самого начала занятий необходимо показывать учащимся, как нужно изображать те или иные фигуры, поскольку при работе по данному учебнику уже на первых уроках появляются куб, параллелепипед, тетраэдр.

Важная роль при изучении стереометрии отводится задачам. Учебник содержит большое количество разнообразных по трудности задач, что дает возможность осуществить индивидуальный подход к учащимся, в частности, организовать работу с наиболее сильными учениками, проявляющими интерес к математике.

Учителю следует иметь в виду, что все приведенные в книге рекомендации являются примерными, их не нужно рассматривать как обязательные. В зависимости от уровня математической подготовки учащихся конкретного класса учитель может и должен вносить коррективы в предлагаемые рекомендации по проведению урока, по подбору заданий для классной и домашней работы.

**Метод координат в пространстве (15 ч)**

***Координаты точки и координаты вектора (7 ч)***

Прямоугольная система координат в пространстве. Координаты вектора. Связь между координатами векторов и координат точек. Простейшие задачи в координатах.

***Скалярное произведение векторов (4 ч)***

Угол между векторами. Скалярное произведение векторов. Вычисление углов между прямыми и плоскостями.

***Движения (4 ч)***

Движения. Центральная симметрия. Зеркальная симметрия. Осевая симметрия. Параллельный перенос.

**Цилиндр, конус и шар (17 ч)**

***Цилиндр (3 ч)***

Понятие цилиндра. Цилиндр.

***Конус (3 ч)***

Конус. Усеченный конус.

***Сфера (11 ч)***

Сфера. Уравнение сферы. Взаимное расположение сферы и плоскости. Касательная плоскость к сфере. Площадь сферы.

**Объемы тел (22 ч)**

***Объем прямоугольного параллелепипеда (3 ч)***

Понятие объема. Объем прямоугольного параллелепипеда. Объем прямоугольного параллелепипеда. Объем прямоугольной призмы, основанием которой является прямоугольный треугольник. Объем прямоугольного параллелепипеда.

***Объем прямой призмы и цилиндра (3 ч)***

Объем прямой призмы. Объем цилиндра.

***Объем наклонной призмы, пирамиды и конуса (8 ч)***

Вычисление объемов тел с помощью интеграла Объем наклонной призмы. Объем пирамиды. Объем конуса.

***Объем шара и площадь сферы (8 ч)***

Объем шара. Объем шарового сегмента, шарового слоя, сектора. Площадь сферы.

**Итоговое повторение курса геометрии 10–11 классов (14 ч)**

Аксиомы стереометрии. Параллельность прямых, параллельность прямой и плоскости. Скрещивающиеся прямые. Параллельность плоскостей. Перпендикулярность прямой и плоскости. Теорема о трех перпендикулярах. Угол между прямой и плоскостью. Двугранный угол. Перпендикулярность плоскостей. Многогранники: параллелепипед, призма, пирамида, площади их поверхностей. Многогранники: параллелепипед, призма, пирамида. Векторы в пространстве. Действия над векторами. Скалярное произведение векторов. Цилиндр, конус и шар, площади их поверхностей. Объемы тел. Комбинации с описанными сферами.

# Глава V

# МЕТОД КООРДИНАТ В ПРОСТРАНСТВЕ

## §1. Координаты точки и координаты вектора (уроки 1–7)

### Урок 1. Прямоугольная система координат в пространстве

*Цели урока:*

– ввести понятие прямоугольной системы координат в пространстве;
– выработать умение строить точку по заданным координатам и находить координаты точки, изображенной в заданной системе координат.

### Ход урока

**I. Организационный момент**

Сообщить тему урока и сформулировать цели.

**II. Устная работа**

1. Даны точки $A$ (–1; 7) и $B$ (7; 1).
   а) Найдите координаты середины отрезка $AB$ $\left[C(3;4)\right]$.
   б) Найдите длину отрезка $AB$ $\left(|AB|=10\right)$.
2. Запишите координаты вектора $\vec{m}=-3\vec{i}+2\vec{j}$ $(\vec{m}\{-3;2\})$.
3. Среди векторов $\vec{a}\{-4;5\}, \vec{b}\{-8;10\}, \vec{c}\{2;-2{,}5\}$ укажите пару коллинеарных векторов ($\vec{a}$ и $\vec{b}, \vec{b}=2\vec{a}$).
4. $E$ (–2; 3), $F$ (1; 2). Найдите координаты вектора $\overrightarrow{EF}$ $(\overrightarrow{EF}\{3;-1\})$.
5. Найдите расстояние между точками $A$ ($a$; o) и $B$ ($b$; o). ($d=|b-a|$).

**III. Изучение нового материала**

1. *Вопрос* 1. Сколькими координатами может быть задана точка на прямой? (Одной.)

*Вопрос 2.* Сколькими координатами может быть задана точка в координатной плоскости? (Двумя.)

Тогда в пространстве, по-видимому, точка может быть задана тремя координатами.

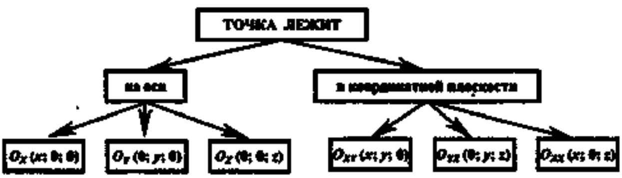
2. Объяснить, как задается прямоугольная система координат в пространстве и ее построение на плоскости. Прямоугольная система координат в пространстве задана, если выбрана точка – начало координат, через эту точку проведены три попарно перпендикулярные прямые, на каждой из которых выбрано направление (оно обозначается стрелкой) и задана единица измерения отрезков.

Желательно склеить из плотной бумаги разлинованной на клетки, модель системы координат в пространстве с разноцветными плоскостями.

3. Используя рисунок 114 учебника, обратить внимание на обозначения и названия осей координат в пространстве, сопоставить эти обозначения с соответствующими обозначениями осей координат на плоскости, известными из курса алгебры и геометрии VII–IX классов.

4. Подчеркнуть, что в прямоугольной системе координат каждой точке $M$ пространства соответствует тройка чисел, которые называются ее координатами. Они определяются аналогично координатам точек на плоскости. Для определения координат точки $M$ в пространстве через эту точку проводят три плоскости, перпендикулярные к осям координат. Затем, используя точки $M_1$, $M_2$, $M_3$ пересечения этих плоскостей с осями координат, находят координаты точки $M$ (рис. 115 учебника).

5. Обратить внимание на нахождение координат точек, лежащих в координатных плоскостях или на осях координат.




**IV. Закрепление изучаемого материала**

Для закрепления навыков нахождения координат точек и построения точек по заданным координатам можно использовать задачи № 400–402. При их решении целесообразно в некоторых случаях построить точки па рисунке по заданным координатам, хотя на поставленные вопросы можно ответить устно без рисунков.

***Задача № 400 а), г)*** (Устно).

***Задача № 401 а).***

*Дано:* точка $A$ (2; –3; 5).

*Найти:* координаты проекций этой точки на координатные плоскости.

*Решение*: Воспользуемся нашей таблицей. Так как нам необходимо узнать координаты проекций на координатные плоскости, рассмотрим точку $A_1$ – проекцию на плоскость $Oxy$. Значит $A_1$ – лежит в плоскости $Oxy$ и ее координаты $A$ (2; –3; 0). $A_2$ – проекция точки $A$ на плоскость $xOz$ и ее координаты (2; 0; 5). $A_3$ – проекция точки $A$ на плоскость $yOz$ и ее координаты (0; –3; 5) (рисунок 1.1 можно не рисовать).

***Задача № 402.***

*Дано:* координаты четырех вершин куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$: $A$ (0; 0; 0), $B$ (0; 0; 1), $D$ (0; 1; 0), $A_1$ (1; 0; 0).

*Найти:* координаты остальных вершин.

*Решение*: Изобразим на рисунке систему координат $Axyz$ и отметим точки $B_1$, $D_1$, $A_1$. Проведем через эти точки плоскости, перпендикулярные осям координат. В результате получится куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис 1.2). Видно, что вершины $C$, $B_1$, $C_1$, $D_1$ имеют следующие координаты: $C(0; 1; 1)$, $B_1(1; 0; 1)$, $C_1(1; 1; 1)$, $D_1(1; 1; 0)$.

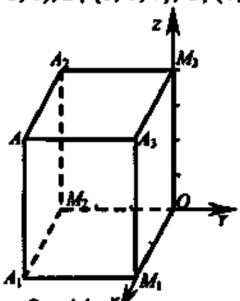


Рис. 1.1

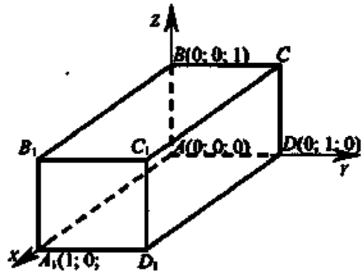


Рис. 1.2

**V. Итог урока**

– Итак, мы рассмотрели прямоугольную систему координат и научились строить точки по заданным координатам и находить координаты точки, изображенной в системе координат.

---

**Домашнее задание**

1) П. 42, № 400 (б, д), 401 (для точки $B$), повторить пп. 34–41.

2) П. 42, № 400 (б, в, д, е), № 401, пп. 34–41.

## Урок 2. Координаты вектора

*Цели урока:*

– познакомить учащихся с понятием координатных векторов, показать возможность разложения произвольного вектора по координатным векторам $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$;

– ввести понятие координат вектора в данной системе координат и отработать навыки действий над векторами с заданными координатами.

## Ход урока

**I. Организационный момент**

Учитель сообщает тему, цель и план урока.

**II. Актуализация знаний учащихся**

1. Проверка домашнего задания:

а) № 400 (д, е), учащийся готовит решение на доске.

*Дано*: $A(3; -1; 0)$, $B(0; 0; -7)$, $C(2; 0; 0)$, $D(-4; 0; 4)$, $E(0; -1; 0)$, $F(1; 2; 3)$, $G(0; 5; -7)$, $H(-\sqrt{5}; \sqrt{3}; 0)$.

*Указать*: д) точки, лежащие в плоскости $Oyz$; е) точки, лежащие в плоскости $Oxz$.

*Решение*: д) Точки $B$ (0; 0; –7), $E$ (0; –1; 0), $G$ (0; 5; –7) – лежат в плоскости $Oyz$, е) Точки $B$ (0; 0; –7), $C$ (2; 0; 0), $D$ (–4; 0; 3) – лежит в плоскости $Oxz$.

*Дополнительные вопросы:*

– Как называются координаты точки в пространстве?

– Дать определение вектора.

– Дать определение компланарных векторов.

б) Второй учащийся выполняет у доски задание по карточке.

Начертить прямоугольную трехмерную систему координат и отметить в ней точки $A$ (1; 4; 3), $B$ (0; 5; –3), $C$ (0; 0; 3) и $D$ (4; 0; 6).

*Решение* (рис. 2):

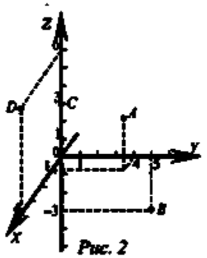


*Рис. 2*

*Дополнительные вопросы:*

– Как расположена точка относительно прямоугольной системы координат, если ее а) абсцисса равна нулю; б) ордината равна нулю; в) аппликата равна нулю; г) абсцисса и ордината равны нулю?

2. С остальными учащимися класса проводится фронтальный опрос.

*Вопросы*:

– Как вводится декартова система координат в пространстве?

– При каких условиях говорят, что задана прямоугольная система координат?

– Объясните, как определяются координаты точки в пространстве?

– Используя рисунок (рис. 3 показывается через кодоскоп или готовится на закрытой доске), определить координаты точек $A$, $B$, $C$ и $D$.

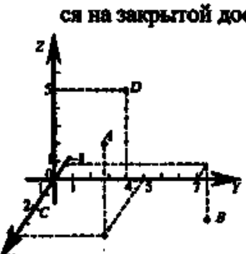


*Рис. 3*

– Как располагаются точки относительно системы координат, если а) одна ее координата равна нулю; б) две ее координаты равны нулю?

*Примеры*:

– Объясните, почему все точки, лежащие на прямой, параллельной плоскости $Oxy$, имеют одну и ту же аппликату?

– Даны точки $A$ (2; 4; 5), $B$ (3; $a$; $b$), $C$ (0; 4; $d$) и $D$ (5; $n$; $m$). При каких значениях $a$, $в$, $d$, $n$ и $m$ эти точки лежат:

а) в плоскости, параллельной плоскости $Oxy$;

б) в плоскости, параллельной плоскости $Oxz$;

в) на прямой параллельной оси $Ox$?

*Ответ*: а) $a$, $n$ – любые; $b = d = 5$, б) $a = n = 4$; $b$, $d$, $m$ – любые, в) $a = n = 4$; $b = d = m = 5$.

По окончании фронтального опроса просматривается и оценивается работа у доски.

**III. Изучение нового материала**

1. Учащиеся открывают рабочие тетради, записывают дату и тему урока. Учащиеся в тетради, а учитель на доске, строят прямоугольную систе-

му координат $Oxy$, откладывают от начала координат на осях $ox$, $oy$ и $oz$ единичные векторы соответственно $\vec{i}$, $\vec{j}$, и $\vec{k}$. Их называют координатными векторами (рис. 4).

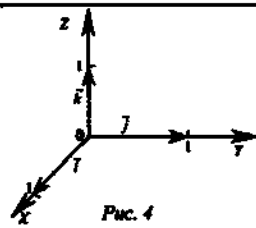



*Рис. 4*

2. Так как векторы $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$ некомпланарны, то любой вектор пространства $\vec{a}$ можно разложить в виде $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, где $x$, $y$ и $z$ определяются единственным образом и являются координатами вектора $\vec{a}$. Обозначается $\vec{a}\ \{x; y; z\}$.

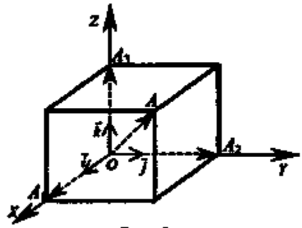



*Рис. 5*

*Пример*: Рассмотрев рисунок 5, где $OA_1 = 2$, $OA_2 = 3$, $OA = 3$, определите координаты векторов $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OA_2}$, $\overrightarrow{OA_3}$ и $\overrightarrow{OA}$.

*Решение*: $\vec{i}\ \{1; 0; 0\}$, $\vec{j}\ \{0; 1; 0\}$, $\vec{k}\ \{0; 0; 1\}$, $\overrightarrow{OA_1}\ \{2; 0; 0\}$, $\overrightarrow{OA_2}\ \{0; 3; 0\}$, $\overrightarrow{OA_3}\ \{0; 0; 3\}$, $\overrightarrow{OA}\ \{2; 3; 3\}$.

Все координаты нулевого вектора равны нулю. Обозначается $\vec{o}\ \{0; 0; 0\}$.

Его можно представить в виде: $\vec{o} = o\vec{i} + o\vec{j} + o\vec{k}$.

3. Вводится правило действий над векторами с заданными координатами и доказываются вместе с учителем. (Можно одно правило доказать с учителем, а остальные, группы учащихся доказывают самостоятельно, затем представители группы доказывают у доски. Можно доказательство задать на дом и проверить на следующем уроке.)

1) Равные векторы имеют равные координаты.

*Дано*: $\vec{a}\ \{x_1; y_1; z_1\}$, $\vec{b}\ \{x_2; y_2; z_2\}$ $\vec{a} = \vec{b}$.
*Доказать*: $x_1 = x_2$; $y_1 = y_2$; $z_1 = z_2$.

*Доказательство*: Так как $\vec{a}\ \{x_1; y_1; z_1\}$, то $\vec{a}\ \{x_1\vec{i}; y_1\vec{j}; z_1\vec{k}\}$; так как $\vec{b}\ \{x_2; y_2; z_2\}$, то $\vec{b}\ \{x_2\vec{i}; y_2\vec{j}; z_2\vec{k}\}$. По условию $\vec{a} = \vec{b} = \vec{o}$. Тогда $\vec{a} - \vec{b} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k} - (x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}) = (x_1\vec{i} - x_2\vec{i}) + + (y_1\vec{j} - y_2\vec{j}) + (z_1\vec{k} - z_2\vec{k}) = (x_1 - x_2)\ \vec{i} + (y_1 - y_2)\ \vec{j} + (z_1 - z_2)\vec{k} = \vec{o}$. Откуда $x_1 - x_2 = 0$ и $x_1 = x_2$; $y_1 - y_2 = 0$ и $y_1 = y_2$ $z_1 - z_2 = 0$ и $z_1 = z_2$.

2) Каждая координата суммы двух (и более) векторов равна сумме соответствующих координат этих векторов.

*Дано*: $\vec{a}\ \{x_1; y_1; z_1\}$, $\vec{b}\ \{x_2; y_2; z_2\}$, $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$.

*Доказать*: $\vec{c}\ \{x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2\}$.

*Доказательство*: Так как $\vec{a}\,\{x_1; y_1; z_1\}$, то $\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$; $\vec{b}\,\{x_2; y_2; z_2\}$, то $\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$, тогда $\vec{a} + \vec{b} = (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}) + (x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}) = (x_1 + x_2)\,\vec{i} + (y_1 + y_2)\,\vec{j} + (z_1 + z_2)\,\vec{k} = \vec{c}$, откуда $\vec{c}\,\{x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2\}$.

3) Каждая координата произведения вектора на число равна произведению соответствующей координаты на это число.

*Дано*: $\vec{a}\,\{x_1; y_1; z_1\}$, $\alpha$ – произвольное число; $\alpha\vec{a} = \vec{c}$.

*Доказать*: $\vec{c}\,\{\alpha x; \alpha y; \alpha z\}$.

*Доказательство*: Так как $\vec{a}\,\{x; y; z\}$, то $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Значит, $\alpha\vec{a} = \alpha(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = \alpha x\vec{i} + \alpha y\vec{j} + \alpha z\vec{k}$, а $\vec{c}\,\{\alpha x; \alpha y; \alpha z\}$.

4) Каждая координата разности двух векторов равна разности соответствующих координат этих векторов.

*Дано*: $\vec{a}\,\{x_1; y_1; z_1\}$, $\vec{b}\,\{x_2; y_2; z_2\}$, $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$.

*Доказать*: $\vec{c}\,\{x_1 - x_2; y_1 - y_2; z_1 - z_2\}$

*Доказательство*: $-\vec{b} = -1 \cdot \vec{b}$, тогда $-\vec{b}\,\{-x_2; -y_2; -z_2\}$. Тогда $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}) = \{x_1 - x_2; y_1 - y_2; z_1 - z_2\}$.

**IV. Закрепление изученного материала**

На закрытой доске заранее подготовлено задание для устной работы.

1. *Даны* векторы $\vec{a}\,\{3; 5; -7\}$, $\vec{b}\,\{4; -1; 3\}$, $\vec{c}\,\{0; 1; 8\}$, $\vec{d}\,\{3; 0; 0\}$.
   1) Разложить их по координатным векторам.
   2) *Найти* вектор равный а) $2\vec{a}$; б) $-3\vec{b}$; в) $\vec{a} + \vec{c}$; г) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{d}$.
2. *Дано*: $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{i} + 2\vec{k}$, $\vec{c} = -\vec{i} + 2\vec{j} + 7\vec{k}$. Укажите координаты векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

**V. Формирование знаний, умений и навыков учащихся**

Задачи № 403 и № 404 (по 2 примерам) по 2 человека для контроля решают у доски, а класс решает самостоятельно, затем сверяется с решением у доски. Учитель в это время контролирует работу у доски.

***Задача № 403.***

$\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 5\vec{k}$, тогда $\vec{a}\,\{3; 2; -5\}$;

$\vec{b} = -5\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$, тогда $\vec{b}\,\{-5; 3; -1\}$.

***Задача № 404.***

$\vec{a}\,\{5; -1; 2\}$, тогда $\vec{a} = 5\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$;

$\vec{b}\,\{-3; -1; 0\}$, тогда $\vec{b} = -3\vec{i} - \vec{j}$.

Аналогично выполняется № 407. У доски 1-й учащийся выполняет пункты а, б, в, 2-й – г, д, е.

Учитель в это время контролирует работу слабых учащихся и проверяет работу у доски.

***Задача № 407.***

*Дано*: $\vec{a}\{3; -2; 5\}$, $\vec{b}\{0; 7; -1\}$, $\vec{c}\{\frac{2}{3}; 0; 0\}$, $\vec{d}\{-2,7; 3,1; 0,5\}$.

*Найти*: а) $\vec{a}+\vec{b}$ б) $\vec{a}+\vec{c}$, в) $\vec{b}+\vec{c}$, г) $\vec{d}+\vec{b}$, д) $\vec{d}+\vec{a}$, е) $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$.

***Решение:***

а) $\vec{a}\{3; -2; 5\}\ \vec{b}\{0; 7; -1\}\ \vec{a}+\vec{b}=\vec{n}\{3; 5; 4\}$;

б) $\vec{a}\{3; -2; 5\}\ \vec{c}\{\frac{2}{3}; 0; 0\}\ \vec{a}+\vec{c}=\{3\frac{2}{3}; -2; 5\}$;

в) $\vec{b}\{0; 7; -1\}\ \vec{c}\{\frac{2}{3}; 0; 0\}\ \vec{b}+\vec{c}=\vec{n}\{\frac{2}{3}; 7; -1\}$;

г) $\vec{d}\{-2,7; 3,1; 0,5\}\ \vec{b}\{0; 7; -1\}\ \vec{d}+\vec{b}=\vec{n}\{-2,7; 10,1; -0,5\}$;

д) $\vec{d}\{-2,7; 3,1; 0,5\}\ \vec{a}\{3; -2; 5\}\ \vec{d}+\vec{a}=\vec{n}\{0,3; 1,1; 5,5\}$;

е) $\vec{a}\{3; -2; 5\}$, $\vec{b}\{0; 7; -1\}$, $\vec{c}\{\frac{2}{3}; 0; 0\}$, $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{n}\{3\frac{2}{3}; 5; 4\}$

**VI. Итог урока**

– Сегодня на уроке мы изучили понятие координационных векторов и рассмотрели разложение произвольного вектора по векторам $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Также мы изучили понятие координат вектора и правила действий над векторами.

---

**Домашнее задание**

П. 43 (или теорию по тетради), повторить определение средней линии треугольника и теорему о средней линии треугольника. № 403, 404, 407 (оставшиеся пункты).

## Урок 3. Координаты вектора

*Цели урока*:

– отработка умений и навыков действий над векторами с заданными координатами;
– контроль знаний и умений учащихся в ходе выполнения самостоятельной работы.

## Ход урока

**I. Организационный момент**

Учитель сообщает тему, цель и план урока.

**II. Актуализация знаний, умений и навыков учащихся**

1. Двое учащихся у доски доказывают правила действий с векторами (1; 2) и (3; 4).
2. С остальными учащимися проводится математический диктант.

*Вопросы:*

1) Укажите координаты векторов $\vec{i}$ и $\vec{k}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$.

2) На какой координатной оси или в какой координатной плоскости лежат точки, если а) $A(2;3;0)$, б) $B(0;0;4)$, в) $C(3;0;1)$; а) $M(0;8;0)$, б) $N(0;2;6)$, в) $K(-7;0;7)$?

(*Ответ*: а) $A \in (xOy)$ б) $B \in (xOz)$, $B \in (yOz)$, $B \in Oz$; в) $C \in (xOz)$; а) $M \in (xOy)$, $M \in (yOz)$, $M \in Oy$ б) $N \in (yOz)$, в) $K \in (xOz)$.)

3) Записать разложение векторов $\vec{a}\{3;-2;8\}$, $\vec{b}\{\sqrt{7};0;-\frac{1}{3}\}$; $\vec{a}\{0;0;\sqrt{3}\}$, $\vec{b}\{-0,2;6;11\}$.

*Решение*: $\vec{a}=3\vec{i}-2\vec{j}+8\vec{k}$, $\vec{b}=\sqrt{7}\vec{i}-\frac{1}{3}\vec{k}$; $\vec{a}=\sqrt{3}\vec{k}$, $\vec{b}=-0,2\vec{i}+6\vec{j}+11\vec{k}$.

4) Записать координаты векторов $\vec{n}$ и $\vec{m}$, если $\vec{n}=3\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$, $\vec{m}=\vec{j}+0,8\vec{k}$; $\vec{n}=5\vec{i}-\vec{j}$, $\vec{m}=2\vec{i}+\vec{j}-7\vec{k}$.

*Решение*: $n\{3;2;-1\}$, $m\{0;1;0,8\}$; $n\{5;-1;0\}$, $m\{2;1;-7\}$.

5) В какой координатной плоскости лежит вектор $\vec{a}$, если $\vec{a}=-\alpha\vec{i}+3\vec{k}$; $\vec{a}=\vec{j}+5\vec{k}$.

*Решение*: $\vec{a}\{-2;0;3\}$, то есть $\vec{a}\subset(xoz)$; $\vec{a}\{0;1;5\}$, то есть $\vec{a}\subset(y0z)$.

6) На какой координатной оси лежит вектор $\vec{b}$, если а) $\vec{b}\{3;0;0\}$, б) $\vec{b}\{0;0;-7\}$; а) $\vec{b}\{4;0;0\}$, б) $\vec{b}\{0;5;0\}$.

*Ответы*: а) $\vec{b}\subset Ox$; $\vec{b}\subset Ox$, б) $\vec{b}\subset Oz$; $\vec{b}\subset Oy$.

Верные ответы можно заготовить заранее на запасной доске (или показать через кодоскоп) и осуществить взаимопроверку.

По окончании математического диктанта заслушиваются доказательства правил действий над векторами с заданными координатами.

*Дополнительные вопросы отвечающим у доски:*

1) Какие векторы называются коллинеарными?
2) Дайте определение средней линии треугольника.
1) Какие векторы называются компланарными?
2) Расскажите теорему о средней линии треугольника.

## III. Отработка знаний, умений и навыков

***Задача № 410*** (решается у доски)

*Дано*: $\vec{a}\{-1;2;0\}$, $\vec{b}\{0;-5;-2\}$, $\vec{c}\{2;1;-3\}$.

*Найти*: а) $\vec{p}=3\vec{b}-2\vec{a}+3\vec{c}$, б) $\vec{q}=3\vec{c}-2\vec{b}+\vec{a}$.

*Решение*:

а) $3\vec{b}\{0;-15;-6\}$, $-2\vec{a}\{2;-4;0\}$, $3\vec{c}\{6;3;-9\}$. $3\vec{b}-2\vec{a}+3\vec{c}=$ $=\vec{p}\{8;-16;-15\}$.

б) $3\vec{c}\{6;3;-9\}$. $-2\vec{b}\{0;10;4\}$. $\vec{a}\{-1;2;0\}$. $3\vec{c}-2\vec{b}+\vec{a}=\vec{q}\{5;15;-5\}$.

***Задача № 408*** (решается у доски)

*Дано*: $OA=4$, $OB=9$, $OC=2$, $M$, $N$, $P$ – середины отрезков $AC$, $OC$, $CB$ (рис. 6).

*Найти*: координаты векторов $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{NP}$, $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{OP}$.

*Решение*:

$P$ – середина $BC$; $N$ – середина $OC$; $M$ – середина $AC$.

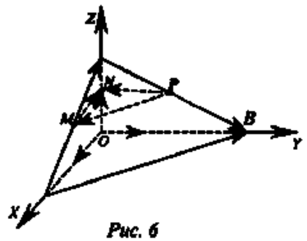


*Рис. 6*

1) $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=2\vec{k}-4\vec{i}$; $\overrightarrow{AC}\{-4;0;2\}$.

2) $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=9\vec{j}-2\vec{k}$; $\overrightarrow{CB}\{0;9;2\}$.

3) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=9\vec{j}-4\vec{i}$; $\overrightarrow{AB}\{-4;9;0\}$.

4) $MN$ – средняя линия $\Delta AOC$, значит, $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}=2\vec{i}$; $\overrightarrow{MN}\{2;0;0\}$.

5) $NP$ – средняя линия $\Delta COB$, значит, $\overrightarrow{NP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}=4,5\vec{j}$; $\overrightarrow{NP}\{0;4,5;0\}$.

6) $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=4\vec{i}+\vec{k}-2\vec{i}=2\vec{i}+\vec{k}$; $\overrightarrow{OM}\{2;0;1\}$.

7) $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{OB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}=9\vec{j}-4,5\vec{j}-\vec{k}=4,5\vec{j}-\vec{k}$; $\overrightarrow{OP}\{0;4,5;-1\}$.

***Задача № 414 (а)*** (решается у доски)

*Дано*: $\vec{a}\{15;m;1\}$ $\vec{b}\{18;12;n\}$ $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – коллинеарны.

*Найти*: $m$; $n$.

*Решение*: Так как $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны и $\vec{a}$, $\vec{b}\neq 0$, то существует число $k$ такое, что $\vec{b}=k\vec{a}$ и обратно. Если существует число $k$, такое что $\vec{b}=k\vec{a}$, то $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны. Найдем числа $m$, $n$ и $k$, чтобы $\vec{b}=k\vec{a}$. Используя условие, имеем: $18=15k$; $12=mk$; $n=k$; $k=\frac{6}{5}$; $12=\frac{6}{5}m$; $n=k$; $k=\frac{6}{5}$; $m=10$; $n=\frac{6}{5}$. Итак, векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, если $m=10$, $n=\frac{6}{5}$.

(*Ответ*: $m=10$, $n=\frac{6}{5}$.)

**IV. Самостоятельная работа** (см. приложение)

*Ответы:*

Вариант А 1: 1. $\vec{c}\{-1;-3,5;4\}$, 2. $\{1;1;-4\}$, 3. $m=12$, $n=8$.

Вариант А 2: 1. $\vec{c}\{5;-4,5;2\}$, 2. $\{3,5;-1;-15\}$, 3. $m=12$, $n=1$.

*Решение*:

***Вариант Б 1:*** 1. $3\vec{a}\{3;-9;-3\}$, $\vec{c}\{4;-11;-3\}$. 2. $-\frac{1}{2}\vec{a}\{-1;-2;3\}$, $2\vec{b}\{-18;-6;12\}$, $\vec{p}\{-22;-8;16\}$. 3. $3\vec{a}\{3;-6;0\}$ $\frac{1}{2}\vec{b}\{-1;0;2\}$, $3\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}\{4;-6;-2\}$, $\frac{4}{8}=\frac{-6}{m}=\frac{-2}{n}$; $m=-12$; $n=-4$.

***Вариант Б 2:*** 1. $2\vec{b}\{-2;4;0\}$, $\vec{c}\{-1;1;-1\}$. 2. $\frac{1}{3}\vec{b}\{-3;-1;2\}$, $2\vec{c}\{6;0;-2\}$, $\vec{p}\{11;5;-10\}$. 3. $2\vec{a}\{2;-4;0\}$, $3\vec{b}\{-6;0;12\}$, $2\vec{a}-3\vec{b}\{8;-4;-12\}$, $\frac{8}{m}=\frac{-4}{8}=\frac{-12}{n}$; $m=16$, $n=24$.

***Вариант В 1:*** 1. $2\vec{a}\{8;-6;10\}$, $3\vec{b}\{-9;3;6\}$, $\vec{c}\{17;9;4\}$.
2. $\frac{1}{2}\vec{a}\{1;-0{,}5;0\}$, $3\vec{b}\{-9;3;6\}$, $2\vec{c}\{2;2;8\}$, $\vec{p}\{-10;3{,}5;-5\}$.
3. $\frac{1}{2}\vec{a}\{1;-2;0\}$, $3\vec{b}\{9;-3;-6\}$, $\frac{1}{2}\vec{a}-3\vec{b}\{-8;1;6\}$, $\frac{-8}{m+n}=\frac{1}{-3}=\frac{6}{m-n}$.

***Вариант В 2:*** 1. $3\vec{a}\{12;-9;15\}$, $\frac{1}{2}\vec{b}\{-1{,}5;0{,}5;1\}$, $\vec{c}\{10{,}5;-8{,}5;14\}$.
2. $3\vec{a}\{6;-3;0\}$, $2\vec{b}\{-6;4;2\}$, $4\vec{c}\{4;4;16\}$, $\vec{p}\{-4;-3;-14\}$.
3. $2\vec{a}\{4;-8;0\}$, $3\vec{b}\{9;-3;-6\}$, $2\vec{a}-3\vec{b}\{-5;-5;6\}$, $m=\frac{-5}{3}$, $n=0$.

**V. Итог урока**

**– В ходе урока мы повторили правила действий над векторами и проверили усвоение данной темы.**

---

**Домашнее задание**

**№ 409 (в, е, ж, и, м); 411**
**(2 пункта по выбору учащихся).**

## Урок 4. Связь между координатами векторов и координат точек

*Цели урока:*

- **ввести понятие радиус-вектора произвольной точки пространства;**
- **доказать, что координаты точки равны соответствующим координатам ее радиус-вектора, а координата любого вектора равна разности соответствующих координат его конца и начала;**
- **отработать понятие равных векторов при решении задач;**
- **отработать понятие коллинеарных и компланарных векторов при решении задач.**

## Ход урока

**I. Проверка домашнего задания**

**Одного ученика из класса просим воспроизвести на доске решение № 415 *а); д).***

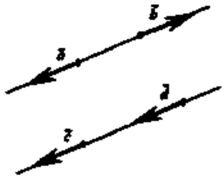
**В это же время классу задаются вопросы:**

**1) Какие векторы называются коллинеарными?**

**2) Какие векторы называются компланарными?**

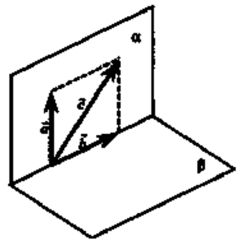
Ответы иллюстрируем таблицей:

Коллинеарные векторы



Ненулевые векторы называются коллинеарными, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых

Компланарные векторы



Векторы называются компланарными, если при откладывании их от одной и той же точки они будут лежать в одной плоскости.

*Задача№ 415 а), д)*

а) *Дано*: $\vec{a}\{-3; -3; 0\}$ $\vec{i}$; $\vec{j}$.

*Установить*: компланарность данных векторов.

*Решение*: Если вектор $\vec{a}$ можно разложить по векторам $\vec{i}$ и $\vec{j}$, то векторы $\vec{a}$; $\vec{i}$; $\vec{j}$ компланарны, $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, $\begin{array}{l} -3 = x\vec{i} \\ -3 = y\vec{j} \\ 0 = z\vec{k} \end{array}$. $\vec{i}$; $\vec{j}$; $\vec{k}$ – единичные векторы. $x = -3$; $y = -3$; $z = 0$. (*Ответ*: $\vec{a}$; $\vec{i}$; $\vec{j}$ – компланарные векторы.)

д) *Дано*: $\begin{array}{l} \vec{m}\{1; 0; 2\} \\ \vec{n}\{1; 1; -1\} \\ \vec{p}\{-1; 2; 4\} \end{array}$.

*Установить*: компланарность данных векторов.

*Решение*:

1. Векторы $\vec{m}$; $\vec{n}$; $\vec{p}$ не коллинеарны, так как координаты этих векторов не пропорциональные друг другу числа.
2. $\vec{p} = x\vec{m} + y\vec{n}$; $\vec{p}\{-1; 2; 4\} = \{x; 0; 2x\} + \{y; y; -y\}$;

$$\begin{cases} -1 = x + y, \\ 2 = y, \\ 4 = 2x - y, \end{cases} \begin{cases} y = 2, \\ x + 2 = -1, \\ 2x - 2 = 4, \end{cases} \begin{cases} y = 2, \\ x = -3, \\ -6 - 2 = 4 \end{cases}$$ (неверно, так как $-8 \neq 4$).

*Ответ*: $\vec{m}$; $\vec{n}$; $\vec{p}$ – не компланарные векторы.

**II. Объяснение нового материала**

1. Вектор, конец которого совпадает с данной точкой, а начало – с началом координат, называется радиус-вектором данной точки.

2. Координаты любой точки равны соответствующим координатам ее радиус-вектора.

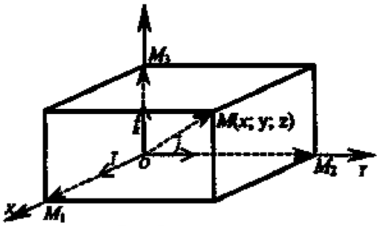



*Рис. 7*

Пусть $M\ (x; y; z)$ (рис. 7). Тогда $M_1$; $M_2$; $M_3$ – точки пересечения с осями координат плоскостей, проходящих через точку $M$, перпендикулярно этим осям. Тогда по правилу параллелепипеда

$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} + \overrightarrow{OM}_3$ (1).

Докажем, что $\overrightarrow{OM_1} = x\vec{i}$.

а) Если $M_1$ лежит на положительной полуоси абсцисс, то $x = OM_1$, а векторы $\overrightarrow{OM}_1 \uparrow\uparrow \vec{i}$ ; $\overrightarrow{OM} = x\vec{i}$ ;

б) Если $M_1$ лежит на отрицательной полуоси абсцисс, то $x = -\overrightarrow{OM_1}$ , а векторы $\overrightarrow{OM_1} \uparrow\downarrow \vec{i}$ .

Поэтому $\overrightarrow{OM_1} = -\overrightarrow{OM_1}$ ;$\vec{i} = x\vec{i}$ .

в) Если $M_1$ совпадает с нулем, то $\overrightarrow{OM_1} = x\vec{i}$ .

Аналогично $\overrightarrow{OM_2} = y \cdot \vec{j}$; $\overrightarrow{OM}_3 = z \cdot \vec{k}$.

Подставим эти выражения в равенство (1), получим $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ то есть $\overrightarrow{OM}\ \{x; y; z\}$.

3. Выразим координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ через координаты точек $A\ (x_1; y_1; z_1)$; $B\ (x_2; y_2; z_2)$ (рис. 8).

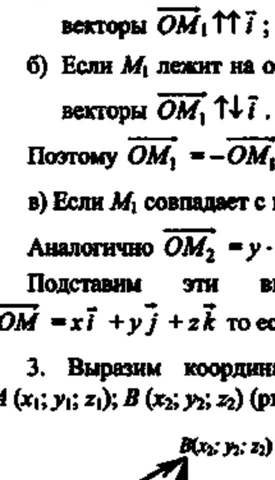



*Рис. 8*

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = x_2 \cdot \vec{i} + y_2 \cdot \vec{j}\ \ z_2 \cdot \vec{k} - x_1 \cdot \vec{i} -$

$- y_1 \cdot \vec{j} - z_1 \cdot \vec{k} = (x_2 - x_1) \cdot \vec{i} + (y_2 - y_1) \cdot \vec{j} +$

$+ (z_2 - z_1) \cdot \vec{k}$.

Значит, $\overrightarrow{AB}\ \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$.

Итак, каждая координата вектора равна разности соответствующих координат его конца и начала.

**III. Закрепление знаний, умений и навыков учащихся**

***1. Задачи № 416; 417*** записываются на доске и разбираются устно в классе, «комментированная работа с места». Предложенная запись заданий позволяет быстро отработать алгоритм решения.

***Задача № 416*** (устно)

*Дано:* $\dfrac{\begin{matrix} O(0; 0; 0) \\ A(x; y; z) \end{matrix}}{\overrightarrow{OA}\{3; 2; 1\}} \uparrow\oplus$ $\dfrac{\begin{matrix} O(0; 0; 0) \\ B(x; y; z) \end{matrix}}{\overrightarrow{OB}\{1; -3; 5\}} \uparrow\oplus$ $\dfrac{\begin{matrix} O(0; 0; 0) \\ C(x; y; z) \end{matrix}}{\overrightarrow{OC}\{-\frac{1}{3}; 0{,}75; -2\frac{3}{4}\}} \uparrow\oplus.$

$\begin{matrix} x-0=3; & y-0=2; & z-0=1 \\ x=3 & y=2 & z=1 \end{matrix}$ $x=1; y=-3; z=5$ $x=\frac{1}{3}; y==0{,}75; z=-2\frac{3}{4}$.

***Задача № 417*** (устно)

$$\text{Дано: } \frac{\frac{O(0;0;0)}{A(2;-3;0)}}{\overrightarrow{OA}\{2;-3;0\}} \uparrow\oplus \frac{\frac{O(0;0;0)}{B(7;-12;18)}}{\overrightarrow{OB}\{7;-12;18\}} \uparrow\oplus \frac{\frac{O(0;0;0)}{C(-8;0;5)}}{\overrightarrow{OC}\{-8;0;5\}}$$

*Найти*: $x, y, z$: $\overrightarrow{OA}\ \{x; y; z\}$ $\overrightarrow{OB}\{x; y; z\}$ $\overrightarrow{OC}\ \{x; y; z\}$

2. Далее, работая над № 418 *а*), наполняем алгебраическим содержанием задания такого типа

***Уровень А***

***Задача № 418 а)***

*Дано*: $\dfrac{A(3;-1;2)}{B(2;-1;4)}\uparrow\oplus.$

*Найти*: $\overrightarrow{AB}\ \{x; y; z\}$.

*Решение*: $\begin{matrix} x=2-3, & y=-1+1, & z=4-2, \\ \underline{x=-1;} & \underline{y=0;} & \underline{z=2.} \end{matrix}$. (*Ответ*: $\overrightarrow{AB}\ \{-1; 0: 2\}$.)

4. Переключаем внимание учащихся на заготовленный лист с тренировочными упражнениями по вариантам уровней Б и В. Проводим обучающую самостоятельную работу и коррекцию.

***Уровень Б***

***I вариант***

1. *Дано*: $\dfrac{\dfrac{A(3;-1;2)}{B(x;y^2;z^2-2z}}{\overrightarrow{AB}\{5;8;1\}}$.

*Найти*: $x; y; z$.

***II вариант***

1. *Дано*: $\dfrac{\dfrac{A(x;-9;10)}{B(3;y^2;z^2-z}}{\overrightarrow{AB}\{7;25;2\}}$.

*Найти*: $x; y; z$.

***Уровень В***

***I вариант***

2. *Дано*: $\dfrac{\dfrac{A(x^2;y^3-3y;-z^2-z)}{B(1;y^2-3;11z+2)}}{\overrightarrow{AB}\{1;0;-30\}}$.

*Найти*: $x; y; z$.

***II вариант***

2. *Дано*: $\dfrac{\dfrac{A(x^2;-6y+12;-12z-40)}{B(4;y^3-2y^2;z^2+z)}}{\overrightarrow{AB}\{4;0;-2\}}$.

*Найти*: $x; y; z$.

Решение обучающей самостоятельной работы:

***Вариант I***

1. *Дано*: $\dfrac{\dfrac{A(3;-1;2)}{B(x;y^2;z^2-2z)}}{\overrightarrow{AB}\{5;8;1\}}$.

*Найти*: $x; y; z$.

*Решение*: 1) $\begin{matrix} x-3=5; \\ x=8 \end{matrix}$. 2) $\begin{matrix} y^2+1=8, \\ y^2=7 \\ y=\pm\sqrt{7} \end{matrix}$. 3) $\begin{matrix} z^2-2z-2=1, \\ z^2-2z-3=0 \\ (z-3)(z+1)=0 \\ z=3; z=-1 \end{matrix}$.

2. *Дано*:

$A(x^2; y^3-3y; -z^2-z)$

$\underline{B(1; y^2-3; 11z+2)}$

$\overrightarrow{AB}\{1; 0; -30\}$

*Найти*: $x; y; z$.

*Решение*:

1) $\begin{matrix} 1-x^2=1, \\ x^2=0, \\ x=0 \end{matrix}$ 2) $\begin{matrix} y^2-3-y^3+3y=0, \\ y^2(1-y)-3(1-y)=0, \\ (y^2-3)(1-y)=0, \\ y=\pm\sqrt{3}; y=1 \end{matrix}$ 3) $\begin{matrix} 11z+2+z^2+z=-30, \\ z^2-12z+32=0, \\ (z-8)(z-4)=0 \\ z=8; z=4 \end{matrix}$.

***Вариант II***

1. *Дано*: $\begin{matrix} A(x^2; -9; 10) \\ \underline{B(3; y^2; z^2-z)} \\ \overrightarrow{AB}\{7; 25; 2\} \end{matrix}$.

*Найти*: $x; y; z$. 1) $\begin{matrix} 3-x=7, \\ x=-4; \end{matrix}$. 2) $\begin{matrix} y^2+9=25, \\ y^2=16; \\ y=\pm 4; \end{matrix}$. 3) $\begin{matrix} z^2-z-10=2, \\ z^2-z-12=0, \\ (z-4)(z+3)=0 \\ Z=4; z=-3 \end{matrix}$

2. *Дано*: $\begin{matrix} A(x^2; -6y+12; -12z-40) \\ \underline{B(4; y^3-2y^2; z^2+z)} \\ \overrightarrow{AB}\{4; 0; -2\} \end{matrix}$

*Найти*: $x; y; z$.

*Решение*:

1) $\begin{matrix} 4-x^2=4, \\ x=0 \end{matrix}$ 2) $\begin{matrix} y^3-2y^2+6y-12=0, \\ y^2(y-2)+6(y-2)=0, \\ (y^2+6)(y-2)=0 \\ y=2 \end{matrix}$ 3) $\begin{matrix} z^2+z+12Z+40=-2, \\ z^2+13z+42=0, \\ (z+6)(z+7)=0 \\ z=-6; z=-7 \end{matrix}$

4. **Далее решается Задача № 420. Учитель ведет запись на доске, уче ник комментирует решение с места.**

***Задача № 420.***

**Задача предваряется вопросами:**

– Какие векторы называются равными?

– Каково свойство равных векторов?

*Ожидаемые ответы*:

– Два вектора называются равными, если их длины равны и они сонаправлены.

– Координаты равных векторов соответственно равны.

*Дано*: A (3; –1; 5), *B* (2; 3; –4), *C* (7; 0; –1), *D* (8; –4; 8).

*Доказать*: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$; $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$

*Решение*: 1) $\left.\begin{matrix}\overrightarrow{AB}\{-1;4;-9\}\\ \overrightarrow{DC}\{-1;4;-9\}\end{matrix}\right| \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$. 2) $\left.\begin{matrix}\overrightarrow{BC}\{5;-3;3\}\\ \overrightarrow{AD}\{5;-3;3\}\end{matrix}\right| \overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$.

5. ***Задача № 422 а)*** подводит итог урока, запись решения проводит вызванный к доске ученик.

***Задача № 422 а)***. *Дано*: *A* (–2; –13; 3), *B* (1; 4: 1), *C* (–1; –1; –4), *D* (0; 0; 0).

*Установить*: *A*; *B*; *C*; *D*; лежат ли в одной плоскости.

*Решение*: 1) $\overrightarrow{AB}$ {3; 17; –2} $\overrightarrow{AC}$ {1; 12; –7} $\overrightarrow{AD}$ {2; 13; –3}.

Так как, сравнивая координаты векторов, мы видим, что они – непропорциональные числа, то делаем вывод, что векторы – не коллинарны.

2) Проверим компланарность векторов.

Предположим, что вектор $\overrightarrow{AB}$ можно разложить по векторам $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$. $\overrightarrow{AD} = x \cdot \overrightarrow{AB} + y \cdot \overrightarrow{AC}$.

Если коэффициенты разложения *x*; *y* находятся однозначно, то векторы компланарны и данные точки лежат в одной плоскости.

$\overrightarrow{AD}$ {2; 13; –3} $= x \cdot \overrightarrow{AB}$ {3; 17; –2} $+ y \cdot \overrightarrow{AC}$ {1; 12; –7}.

Составим и решим систему уравнений.

$\begin{cases}2=3x+y, & (1)\\ 13=17x+12y, & (2)\\ -3=-2x-7y, & (3)\end{cases}$ ; (1): $y = 2 - 3x$; (3): $-3 = -2x - 7(2 - 3x)$; $-3 = -2x -$

$-14 + 21x$; $11 = 19x$; $x = \frac{11}{19}$; (1): $y = 2 - 3\frac{11}{19}$; $y = 2 - \frac{33}{19}$; $y = 2 - 1\frac{14}{19}$;

$y = \frac{5}{19}$. Проверим справедливость (2) при найденных значениях *x* и *y*.

$17 \cdot \frac{11}{19} + 12 \cdot \frac{5}{19} = 13$, $\frac{247}{19} = 13$, 13 = 13 (верно).

***Вывод***: векторы $\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}$ – компланарны.

(*Ответ*: точки *A*; *B*; *C*; *D* лежат в одной плоскости.)

**IV. Подведение итогов**

– Итак, в ходе урока мы изучили понятие радиус-вектора точки, правило нахождения координат вектора, понятие равных векторов. Повторили понятия коллинеарных и компланарных векторов.

**Домашнее задание**

**Уровень А: № 418 *б), в*).**

**Уровень Б: ⊕ № 419; 412 *а), б*).**

**Уровень В: ⊕ № 422 (б); п. 24 (10 кл.) № 366, разобрать решение.**

## Урок 5. Простейшие задачи в координатах

*Цели урока:*

- вывести формулы координат середины отрезка, длины вектора через его координаты и расстояния между двумя точками;
- показать примеры решения стереометрических задач координатно-векторным методом.

### Ход урока

**I. Поверка домашнего задания**

Проверка домашнего задания осуществляется через кодоскоп. Воспроизводятся решения уровней *Б* и *В*.

***Уровень Б***

***№ 419. Дано***: $\Delta ABC$; $A(1;6;2)$, $B(2;3;-1)$, $C(-3;4;5)$.

*Разложить*: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ по координатным векторам $\vec{i}$; $\vec{j}$; $\vec{k}$.

*Решение*:

1) $\overrightarrow{AB}\ \{1;-3;-3\}$; $\overrightarrow{AB}=\vec{i}-3\vec{j}-3\vec{k}$

2) $\overrightarrow{BC}\{-5;1;6\}$; $\overrightarrow{BC}=-5\vec{i}+\vec{j}+6\vec{k}$.

3) $\overrightarrow{CA}\{4;2;-3\}$; $\overrightarrow{CA}=4\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}$.

***№ 421 а), б).***

а) *Дано*: $A(3;-7;8)$, $B(-5;4;1)$, $C(27;-40;29)$.

*Установить*: *A*; *B*; *C* лежат ли на одной прямой.

*Решение*: Если $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ коллинеарны, то *A*; *B*; *C* лежат на одной прямой $\overrightarrow{AB}\{-8;11;-7\}$; $\overrightarrow{AC}\{24;-33;21\}$; $\overrightarrow{AB}=k\cdot\overrightarrow{AC}$; $-8=k\cdot 24$; $11=k\cdot(-33)$; $-7=k\cdot 21$; $k=-\frac{1}{3}$; $k=-\frac{1}{3}$ $k=-\frac{1}{3}$. $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ – коллинеарны, то есть координаты векторов пропорциональные числа, *A*, *B*, *C* лежат на одной прямой.

б) *Дано*: $A(-5;7;12)$, $B(4;-8;3)$, $C(13;-23;-6)$.

*Установить*: *A*; *B*; *C* лежат ли на одной прямой.

*Решение*: Если $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ коллинеарны, то *A*; *B*; *C* лежат на одной прямой. $\overrightarrow{AB}\{9;-15;-9\}$ $\overrightarrow{AC}\{18;-30;-18\}$ $\overrightarrow{AB}=k\cdot\overrightarrow{AC}$; $9=k\cdot 18$;

$-15 = k \cdot (-30)$; $-9 = k \cdot (-18)$; $k = \frac{1}{2}$; $k = \frac{1}{2}$; $k = \frac{1}{2}$. $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ – коллинеарны, то есть координаты векторов пропорциональные числа. $A$; $B$; $C$ лежат на одной прямой.

***Уровень В***

***№ 422 б). Дано***: $A(0; 1; 0)$, $B(3; 4; -1)$, $C(-2; -3; 0)$, $D(2; 0; 3)$

*Установить*: $A$; $B$; $C$; $D$ лежат ли в одной плоскости.

*Решение*: 1) $\overrightarrow{AB}\{3; 3; -1\}$, $\overrightarrow{AC}\{-2; -4; 0\}$, $\overrightarrow{AD}\{2; -1; 3\}$. Сравнивая координаты векторов, мы видим, что они – непропорциональные числа, делаем вывод, что векторы – не коллинеарны. 2) Проверим компланарность векторов. Предположим, что вектор $\overrightarrow{AD}$ можно разложить по векторам $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$. $\overrightarrow{AD} = x \cdot \overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$. Если коэффициенты разложения $x$; $y$ находятся однозначно, то векторы – компланарны и данные точки лежат в одной плоскости. $\overrightarrow{AD}\{2; -1; 3\} = x \cdot \overrightarrow{AB}\{3; 3; -1\} + y \cdot \overrightarrow{AC}\{-2; -4; 0\}$ Составим и решим систему уравнений

$$\begin{cases} 3x - 2y = 2, \\ 3x - 4y = -1, \\ -x = 3; \end{cases} \begin{cases} 3x - 2y = 2, \\ -9 - 4y = -1, \\ x = -3; \end{cases} \begin{cases} 3x - 2y = 2, \\ -4y = 8, \\ x = -3 \end{cases} \begin{cases} -9 + 4 = -5 = 2 \text{ (неверно)} \\ y = -2 \\ x = -3 \end{cases}$$

***Вывод***: векторы: $\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}$ – компланарны. Точки $A$; $B$; $C$; $D$ не лежат в одной плоскости.

## II. Контролирующая самостоятельная работа

*Цель работы*: В течение 10–15 мин., в зависимости от уровня подготовленности класса, провести работу с целью проверки усвоения: а) нахождение координат вектора по заданным координатам точек – начала и конца вектора; б) нахождение координат вектора, выраженного через другие векторы, координаты которых заданы; в) нахождение коэффициента пропорциональности для коллинарных векторов и параметрических переменных, входящих в заданные координаты векторов; г) использование понятия равных векторов; компланарных векторов при решении задач.

Контролирующая самостоятельная работа (см. приложение).

***Решение контролирующей самостоятельной работы***

***Уровень А***

***I вариант***

1. *Дано*: $A(x; y; z)$, $\vec{a}\{-1; 2; 4\}$, $B(2; 0; 5)$ $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$.

*Найти*: $x$; $y$; $z$.

*Решение*:

1) $\overrightarrow{AB}\{2-x; -y; 5-z\}$

2) $\vec{a}\{-1; 2; 4\} = \overrightarrow{AB}\{2-x; -y; 5-z\}$,

***II вариант***

1. *Дано*: $A(1; 4; 0)$ $\vec{a}\{2; -3; 1\}$, $B(x; y; z)$ $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$

*Найти*: $x$; $y$; $z$;

*Решение*:

1) $\overrightarrow{AB}\{x-1; y-4; z\}$.

2) $\vec{a}\{2; -3; 1\} = \overrightarrow{AB}\{x-1; y-4; z\}$;

$-1=2-x$ $-y=2$ $4=5-z$
$x=3$ $y=-2$ $z=1$

2. *Дано*: $\vec{a}=4\vec{i}-3\vec{j}$; $\vec{b}\{-3;1;2\}$;
$\vec{c}=2\vec{a}-3\vec{b}$

*Найти*: $\vec{c}\{x;y;z\}$

*Решение*:

1) $\vec{a}\{4;-3;0\}$; $\vec{b}\{-3;1;2\}$.

2) $\vec{c}=2\vec{a}-3\vec{b}=\{8;-6;0\}+\{9;-3;-6\}=\{17;-9;-6\}$.

3. *Дано*: $\vec{a}\{1;-2;m\}$; $\vec{b}\{n;6;3\}$.

*Найти*: $m, n \mid \vec{a}$ и $\vec{b}$ – коллинеарны.

*Решение*: $\vec{a}=k\cdot\vec{b}$.

1) $-2=k\cdot 6$; $k=-\dfrac{1}{3}$.

2) $1=-\dfrac{1}{3}\cdot n$; $n=-3$.

3) $m=-\dfrac{1}{3}\cdot 3$; $m=-1$.

$2=x-1$ $y-4=-3$ $z=1$.
$x=3$ $y=1$

2. *Дано*: $\vec{a}=-\vec{i}+2\vec{k}$; $\vec{b}\{2;6;-4\}$;
$\vec{c}=\dfrac{1}{2}\vec{b}-2\vec{a}$.

*Найти*: $\vec{c}\{x;y;z\}$.

*Решение*:

1) $\vec{a}\{-1;0;2\}$; $\vec{b}\{2;6;-4\}$.

2) $\vec{c}=\dfrac{1}{2}\vec{b}-2\vec{a}=\{1;3;-2\}+\{2;0;-4\}=$
$=\{3;3;-6\}$.

3. *Дано*: $\vec{a}\{2;m;1\}$; $\vec{b}\{4;-2;n\}$.

*Найти*: $m, n \mid \vec{a}$ и $\vec{b}$ – коллинеарны.

*Решение*: $\vec{a}=k\cdot\vec{b}$.

1) $2=k\cdot 4$; $k=-\dfrac{1}{2}$.

2) $m=\dfrac{1}{2}\cdot(-2)$; $m=-1$.

3) $1=\dfrac{1}{2}\cdot n$; $n=2$.

### *Уровень Б*

1. *Дано*: $A(2;-1;0)$, $B(-3;2;1)$, $C(1;1;4)$.

*Найти*: $D(x;y;z) \mid \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$.

*Решение*:

$\overrightarrow{AB}\{-5;3;1\}=\overrightarrow{CD}\{x-1;y-1;z-4\}$,

$x-1=5$ $y-1=3$ $z-4=1$
$x=-4$ $y=4$ $z=5$, $D(-4;4;5)$.

2. *Дано*: $\vec{a}=\vec{i}-2\vec{j}$, $\vec{b}\{-2;0;4\}$ $\vec{p}=3\vec{a}-\dfrac{1}{2}\vec{b}$ и $\vec{c}\{8;m;n\}$ коллинеарны.

*Найти*: $m$; $n$.

*Решение*: 1) $\vec{a}\{1;-2;0\}$; $\vec{b}\{-2;0;4\}$.

2) $\vec{p}=3\vec{a}-\dfrac{1}{2}\vec{b}=\{3;-6;0\}+\{1;0;-2\}=\{4;-6;-2\}$.

3) $\left.\begin{matrix}\vec{p}\{4;-6;-2\}\\ \vec{c}\{8;m;n\}\end{matrix}\right\}$ коллинеарны, $\vec{p}=k\cdot\vec{c}$.

$4=k\cdot 8$ $-6=\dfrac{1}{2}m$ $-2=\dfrac{1}{2}n$
$k=\dfrac{1}{2}$ $m=-12$ $n=-4$.

1. *Дано*: $A(2;-1;0)$, $B(-3;2;1)$, $C(1;1;4)$.

*Найти*: $D(x;y;z) \mid \overrightarrow{AC}=\overrightarrow{DB}$.

*Решение*:

$\overrightarrow{AC}\{-1;2;4\}=\overrightarrow{DB}\{-3-x;2-y;1-z\}$,

$-3-x=-1$ $2-y=2$ $1-z=4$
$x=-2$ $y=0$ $z=-3$,

$D(-2;0;-3)$.

2. *Дано*: $\vec{a}=\vec{i}-2\vec{j}$, $\vec{b}\{-2;0;4\}$ $\vec{p}=2\vec{a}-3\vec{b}$ и $\vec{c}\{m;8;n\}$ коллинеарны.

*Найти*: $m$; $n$.

*Решение*: 1) $\vec{a}\{1;-2;0\}$; $\vec{b}\{-2;0;4\}$.

2) $\vec{p}=2\vec{a}-3\vec{b}=\{2;-4;0\}+\{6;0;-12\}=\{8;-4;-12\}$.

3) $\left.\begin{matrix}\vec{p}\{8;-4;-12\}\\ \vec{c}\{m;8;n\}\end{matrix}\right\}$ коллинеарны, $\vec{p}=k\cdot\vec{c}$

$-4=k\cdot 8$ $8=-\dfrac{1}{2}m$ $-12=-\dfrac{1}{2}n$
$k=-\dfrac{1}{2}$ $m=-16$ $n=24$.

3. *Дано*: $A(6; -1; 0)$, $B(0; 3; -2)$, $C(3; 1; -1)$.

*Доказать*: $A$; $B$; $C$ лежат на одной прямой. Какая из них лежит между двумя другими.

*Решение*:

$$\begin{matrix} \overrightarrow{AB}\{-6; 4; -2\} \\ \overrightarrow{AC}\{-3; 2; -1\} \end{matrix} \quad k = \frac{1}{2},\ \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB},$$

$C$ лежит между $A$ и $B$.

$$A \longrightarrow C \longrightarrow B$$

3. *Дано*: $A(0; 0; -1)$, $B(5; -3; 1)$, $C(-5; 3; -3)$.

*Доказать*: $A$; $B$; $C$ лежат на одной прямой. Какая из них лежит между двумя другими.

*Решение*:

$$\begin{matrix} \overrightarrow{AB}\{5; -3; 2\} \\ \overrightarrow{AC}\{-5; 3; -2\} \end{matrix} \quad k = -1,\ \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB},$$

$A$ лежит между $C$ и $B$.

$$B \longleftarrow A \longrightarrow C$$

## Уровень В

1. *Дано*: $A(2; -1; 0)$, $B(-3; 2; 1)$, $C(1; 1; 4)$, $\overrightarrow{CD} = -2\overrightarrow{AB}$.

*Найти*: $D(x; y; z)$

*Решение*:

1) $\begin{matrix} \overrightarrow{AB}\{-5; 3; 1\} \\ -2\overrightarrow{AB}\{10; -6; -2\} \end{matrix}$.

2) $\overrightarrow{CD}\{x-1; y-1; z-4\} = -2\overrightarrow{AB}\{10; -6; -2\}$. $\begin{matrix} x-1=10 \\ x=11 \end{matrix}$ $\begin{matrix} y-1=-6 \\ y=-5 \end{matrix}$ $\begin{matrix} z-4=-2 \\ z=2 \end{matrix}$.

$D(11; -5; 2)$.

1. *Дано*: $A(2; -1; 0)$, $B(-3; 2; 1)$, $C(1; 1; 4)$, $\overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{AD}$.

*Найти*: $D(x; y; z)$.

*Решение*:

$\overrightarrow{CB}\{-4; 1; -3\}$

1) $\overrightarrow{AD}\{x-2; y+1; z\}$.

$2\overrightarrow{AD}\{2x-4; 2y+2; 2z\}$

2) $\overrightarrow{CB}\{-4; -1; -3\} = 2\overrightarrow{AD}\{2x-4; 2y+2; 2z\}$, $\begin{matrix} 2x-4=0 \\ 2x=0 \\ x=0 \end{matrix}$ $\begin{matrix} 2y+2=1 \\ 2y=-1 \\ y=-\frac{1}{2} \end{matrix}$ $\begin{matrix} 2z=-3 \\ z=-1{,}5 \end{matrix}$,

$D\left(0; -\frac{1}{2}; -1{,}5\right)$.

2. *Дано*: $\vec{a} = 2\vec{i} - 4\vec{k}$, $\vec{b}\{3; -1; -2\}$, $\vec{p} = \frac{1}{2}\vec{a} - 3\vec{b}$ и $\vec{c}\{m+n; -3; m-n\}$ – коллинеарны.

*Найти*: $m$; $n$.

*Решение*:

1) $\begin{matrix} \vec{a}\{2; 0; -4\} \\ \vec{b}\{3; -1; -2\} \end{matrix}$.

2) $\vec{p} = \frac{1}{2}\vec{a} - 3\vec{b} = \{1; 0; -2;\} + \{-9; 3; 6\} = \{-8; 3; 4\}$.

3) $\vec{p}\{-8; 3; 4\}$, $\vec{c}\{m+n; -3; m-n\}$ – коллинеарны

$\vec{p} = k \cdot \vec{c}$

$3 = k \cdot (-3)$ $\begin{cases} -8 = -(m+n) \end{cases}$ $\begin{cases} m+n = 8 \end{cases}$

2. *Дано*: $\vec{a} = 2\vec{i} - 4\vec{k}$, $\vec{b}\{3; -1; -2\}$, $\vec{p} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$ и $\vec{c}\{m+n; m-n; 2\}$ – коллинеарны.

*Найти*: $m$; $n$.

*Решение*:

1) $\begin{matrix} \vec{a}\{2; 0; -4\} \\ \vec{b}\{3; -1; -2\} \end{matrix}$.

2) $\vec{p} = 2\vec{a} - 3\vec{b} = \{4; 0; -8;\} + \{-9; 3; 6\} = \{-5; 3; -2\}$.

3) $\vec{p}\{-5; 3; -2\}$, $\vec{c}\{m+n; m-n; 2\}$

$\vec{p} = k \cdot \vec{c}$

$-2 = k \cdot 2$ $\begin{cases} -5 = -(m+n) \\ 3 = -(m-n) \end{cases}$ $\begin{cases} m+n = 5 \\ m-n = -3 \end{cases}$

$k = -1$

$2m = 2$, $m = 1$; $n = 4$.

$\vec{p} = k \cdot \vec{c}$

$3 = k \cdot (-3)$ $\begin{cases} -8 = -(m+n) \\ 4 = -(m-n) \end{cases}$ $\begin{cases} m+n = 8 \\ m-n = -4 \end{cases}$

$k = -1$

$2m = 4,\ m = 2;\ n = 6.$

3. *Дано*: $A\ (1;\ 1;\ 1)$, $B\ (-1;\ 0;\ -1)$, $C\ (0;\ 2;\ 2)$, $D\ (2;\ 0;\ 0)$.

*Установить*: $A$; $B$; $C$; $D$ лежат ли в одной плоскости.

*Решение*:

$\overrightarrow{AB}\{-2;-1;-2\}$

1) $\overrightarrow{AC}\{-1;1;1\}$ . Векторы $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{AD}\{1;-1;-1\}$

– коллинеарны, так как их координаты пропорциональные числа.

2) Проверим компланарность векторов.

Предположим, что вектор $\overrightarrow{AD}$ можно разложить по векторам $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{AD} = x \cdot \overrightarrow{AB} + y \cdot \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}\ \{1;-1;\ 1\} =$

$= x \cdot \overrightarrow{AB}\ \{-2;-1;-2\} + y \cdot \overrightarrow{AC}\ \{-1;\ 1;\ 1\}$

$$\begin{cases} -2x - y = 1, \\ -x + y = -1, \\ -2x + y = -1, \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + y = -1 & (1) \\ x - y = 1 & (2) \\ 2x - y = 1 & (3) \end{cases}$$

$(1)-(3): \begin{matrix} 2x + y = -1 \\ 2x - y = 1 \end{matrix}$ $4x = 0, x = 0\ y = -1$

(2): $0 + 1 = 1$; $1 = 1$ (верно) векторы $\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}$ – компланарны. Точки $A$; $B$; $C$; $D$ лежат в одной плоскости.

3. *Дано*: $A\ (1;\ 0;\ -1)$, $B\ (-2;\ -1;\ 0)$, $C\ (0;\ -2;\ -1)$, $D\ (1;\ 5;\ 0)$.

*Установить*: $A$; $B$; $C$; $D$ лежат ли в одной плоскости.

*Решение*:

$\overrightarrow{AB}\{-3;-1;1\}$

1) $\overrightarrow{AC}\{-1;2;0\}$ . Векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AD}\{0;5;1\}$

$\overrightarrow{AD}$ – не коллинеарны, так как их координаты не пропорциональны.

2) Проверим компланарность векторов.

Предположим, что вектор $\overrightarrow{AD}$ можно разложить по векторам $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AD} = x \cdot \overrightarrow{AB} + y \cdot \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}\ \{0;\ 5;\ 1\} =$

$= x \cdot \overrightarrow{AB}\ \{-3;\ -1;\ 1\} + y \cdot \overrightarrow{AC}\ \{-1;\ -2;\ 0\}$.

$$\begin{cases} -3x - y = 0, \\ -x - 2y = 5, \\ x = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} 3x + y = 0 & (1) \\ x + 2y = -5 & (2) \\ x = 1 & (3) \end{cases}$$

$(1)\ :\ \begin{matrix} 3 + y = 0 \\ y = -3 \end{matrix}$ (2): $1 - 6 = -5$;

$-5 = -5$ (верно) векторы $\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}$ – компланарны. Точки $A$; $B$; $C$; $D$ лежат в одной плоскости.

## III. Объяснение нового материала

### 1. Координаты середины отрезка

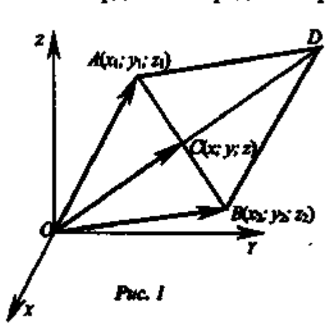



*Рис. 1*

Пусть $A\ (x_1;\ y_1;\ z_1)$, $B\ (x_2;\ y_2;\ z_2)$ (рис. 1).

Найдем координаты середины отрезка $AB$ – точки $C\ (x;\ y;\ z)$.

$\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$, $\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}\ \overrightarrow{OD}$.

$\overrightarrow{OC}\ \{x; y; z\}$, $\overrightarrow{OA}\ \{x_1;\ y_1;\ z_1\}$, $\overrightarrow{OB}\ \{x_2;\ y_2;\ z_2\}$,

$x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$; $y = \frac{1}{2}(y_1 + y_2)$; $z = \frac{1}{2}(z_1 + z_2)$.

Итак, каждая координата середины отрезка равна полусумме соответствующих координат его концов.

2. Вычисление длины вектора по его координатам (рис. 2).

$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ (1).

Найдем длину вектора $\vec{a} = \overrightarrow{OA}\ \{x; y; z\}$. $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + + \overrightarrow{OA_3}$, то есть $\overrightarrow{OA} = x\vec{i} + y \cdot \vec{j} + z\vec{k}$. Из прямоугольного параллелепипеда найдем длину диагонали $OA$. $|\overrightarrow{OA}| = \sqrt{|\overrightarrow{OA_1}|^2 + |\overrightarrow{OA_2}|^2 + |\overrightarrow{OA_3}|^2}$, $|\overrightarrow{OA_1}| = |x|$; $|\overrightarrow{OA_2}| = |y|$; $|\overrightarrow{OA_3}| = |z|$, $|\overrightarrow{OA}| = \sqrt{|x|^2 + |y|^2 + |z|^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

3. Расстояние между двумя точками (рис. 3).

Пусть $M_1\ (x_1; y_1; z_1)$, $M_2\ (x_2; y_2; z_2)$, $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}$, $\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2; y_2; z_2\} - \{x_1; y_1; z_1\} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$. Подставляя в формулу (1) получаем $d = |\overrightarrow{M_1M_2}| =$

$= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.

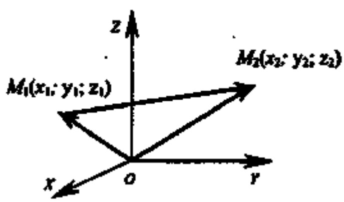


Рис. 3

Это доказательство ученики проводят в тетрадях самостоятельно.

**IV. Закрепление нового материала**

Отработка полученных знаний, умений и навыков.

К доске вызываются 2 ученика, которые решают № 424*а*), 426*а*).

***Задача № 424а).***

*Дано*: $A\ (0; 3; -4)$, $B\ (-2; 2; 0)$, $M$ – середина $AB$.

*Найти*: $M\ (x; y; z)$.

*Решение*:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2};\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2};\ z_M = \frac{z_A + z_B}{2}$$

$$\frac{0-2}{2} = -1; \quad \frac{3+2}{2} = 2{,}5; \quad \frac{-4+0}{2} = -2$$

(*Ответ*: $M\ (-1; 2{,}5; -2)$.)

***Задача № 426а).***

*Дано*: $A\ (-1; 0; 2)$, $B\ (1; -2; 3)$.

*Найти*: $|\overrightarrow{AB}|$.

*Решение*:

1) $\overrightarrow{AB}\ \{2; -2; 1\}$,

2) $\overrightarrow{AB} = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2} = = \sqrt{4+4+1} = \sqrt{9} = 3$.

(*Ответ*: $|\overrightarrow{AB}| = 3$.)

**V. Демонстрация слайда**

Точка пересечения медиан треугольника.

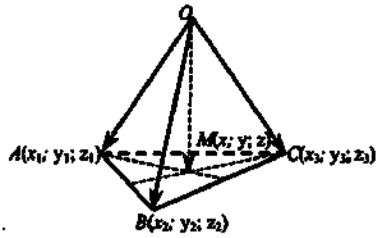



*Рис. 4*

$M$ – точка пересечения медиан треугольника $ABC$, $O$ – начало координат (рис. 4.) $A(x_1; y_1; z_1)$; $B(x_2; y_2; z_2)$; $C(x_3; y_3; z_3)$; $M(x; y; z)$, $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$, $x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$; $y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$; $z = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}$.

**VI. Подведение итогов**

Сегодня мы на уроке проверили усвоение правил нахождения координат вектора, коэффициента пропорциональности для коллинеарных векторов. Вывели формулы для вычисления координат середины отрезка, длины вектора через его координаты и расстояния между двумя точками. Отрабатывали умения и навыки решения стереометрических задач координатно-векторным методом.

---

**Домашнее задание**

Уровень *А*: № 424 *б*); *в*); 425 *а*); 426.

Уровень *Б*: + № 429.

*Творческое задание:* составить карточки-задания номеров, аналогичных номерам в самостоятельной работе и задачам № 424–426.

## Урок 6. Простейшие задачи в координатах

*Цели урока:*

– показать примеры решения стереометрических задач координатно-векторным методом;
– совершенствовать навыки решения задач.

### Ход урока

**I. Организационный момент**

Сообщить тему урока, сформулировать цели урока.

**II. Актуализация опорных знаний**

1. Теоретический опрос:

а) Вывести формулу координат середины отрезка.

б) Вывести формулу длины отрезка.

2. Проверка домашнего задания:

Один ученик на доске записывает решение домашнего задания № 429.

*Дано*: $M(-4; 7; 0)$ $N(0; -1; 2)$.

*Найти:* расстояние от начала координат до середины отрезка $MN$.

*Решение*: Пусть $K$ – середина отрезка $MN$, тогда $K\left(\frac{x_M+x_N}{2};\frac{y_M+y_N}{2};\frac{z_M+z_N}{2}\right)$, $K\left(\frac{-4+0}{2};\frac{7-1}{2};\frac{0+2}{2}\right)$; $K(-2;3;1)$.

Значит, $\overrightarrow{OK}\{-2;3;1\}$ и $|\overrightarrow{OK}|=\sqrt{(-2)^2+3^2+1^2}=\sqrt{14}$; $OK=\sqrt{14}$.

3. Индивидуальная дифференцированная работа на карточках (см. приложение).

4. Математический диктант (см. приложение).

***Решение индивидуально-дифференцированных заданий***

**Карточка № 1**

1) *Дано*: $\vec{a}=4\vec{i}-3\vec{j}$; $\vec{b}\{-3;1;2\}$; $\vec{c}=2\vec{a}-3\vec{b}$.

*Найти*: координаты $\vec{c}$.

*Решение*: $\vec{a}\{4;-3;0\}$, $x=2\cdot4-3\cdot(-3)=17$; $y=2\cdot(-3)-3\cdot1=-9$; $z=$ $=2\cdot0-3\cdot2=-6$. (*Ответ*: $\vec{c}\{17;-9;-6\}$.)

2) *Дано*: $\vec{a}\{1;-2;m\}$; $\vec{b}\{n;6;3\}$, $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны.

*Найти*: $m$ и $n$.

*Решение*: По определению коллинеарных векторов $\vec{b}=k\cdot\vec{a}$; $6=-2\cdot k$; $k=-3$. Значит, $n=-3\cdot1$; $n=-3$, $3=-3\cdot m$; $m=-1$. Так как $k<0$, то $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$; $\vec{b}\{-3;6;3\}$; $\vec{a}\{1;-2;-1\}$. Видно $|\vec{b}|>|\vec{a}|$. (*Ответ*: $n=-3$; $m=-1$; $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$.)

**Карточка № 2**

1) *Дано*: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямоугольный параллелепипед (рис. 1).

а) *Найти*: координаты точек $B_1$; $D_1$.

б) *Разложить* $\overrightarrow{A_1C}$ по координатам векторов $\vec{i}$; $\vec{j}$; $\vec{k}$.

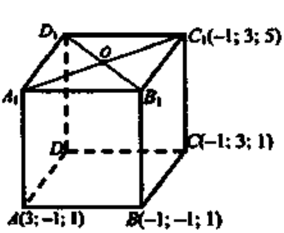


*Рис. 1*

*Решение*:

а) Так как параллелепипед прямоугольный, то координаты $B_1(-1;-1;5)$; $A_1(3;-1;5)$. Используя формулу координат середины отрезка, $O\left(\frac{3-1}{2};\frac{3-1}{2};\frac{5+5}{2}\right)$;

$$1=\frac{-1+x}{2};\ x=3,$$

$O(1;1;5)$. Найдем координаты $D_1$: $1=\frac{-1+y}{2}$; $y=3$, $D_1(3;3;5)$.

$$5=\frac{5+z}{2};\ z=5.$$

б) $A_1(3;-1;5)$ $C(-1;3;1) \Rightarrow \overrightarrow{A_1C}\{-1-3;3+1;1-5\}$, $\overrightarrow{A_1C}\{-4;4;-4\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \overrightarrow{A_1C} = -4\vec{i}+4\vec{j}-4\vec{k}$.

(*Ответ*: а) $B_1(-1;-1;5)$; $D_1(3;3;5)$, б) $\overrightarrow{A_1C} = -4\vec{i}+4\vec{j}-4\vec{k}$.)

2) *Дано*: $A(6;-1;0)$, $B(0;3;-2)$, $C(3;1;-1)$.

*Доказать*: точки $A$, $B$, $C$ лежат на одной прямой.

*Решение*: Если векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ коллинеарны, то точки $A$, $B$, $C$ лежат на одной прямой, в противном случае – не лежат на одной прямой. Найдем координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AB}\{0-6;3+1;-2-0\}$; $\overrightarrow{AB}\{-6;4;-2\}$, $\overrightarrow{AC}\{3-6;1+1;-1-0\}$; $\overrightarrow{AC}\{-3;2;-1\}$. Очевидно, $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AC}$, значит, векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ коллинеарны, и, следовательно, точки $A$, $B$, $C$ лежат на одной прямой.

**Карточка № 3**

1) *Дано*: $A(2;-1;0)$, $B(-3;2;1)$, $C(1;1;4)$; $\overrightarrow{CD}=-2\overrightarrow{AB}$.

*Найти:* координаты точки $D$.

*Решение*: Найдем координаты векторов $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{AB}$, если $D(x;y;z)$, $\overrightarrow{AB}\{-3-2;2+1;1-0\}$; $\overrightarrow{AB}\{-5;3;1\}$; $\overrightarrow{CD}\{x-1;y-1;z-4\}$. Пользуясь условием $\overrightarrow{CD}=-2\overrightarrow{AB}$, составим уравнения для координат векторов $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{AB}$.

$$\begin{array}{lll} x-1=-2\cdot(-5), & y-1=-2\cdot 3, & z-4=1\cdot(-2), \\ x-1=10, & y-1=-6, & z-4=-2, \\ x=11; & y=-5; & z=2. \end{array}$$

(*Ответ*: $D(11;-5;2)$.)

2) *Дано*: $A(1;1;1)$, $B(-1;0;-1)$, $C(0;2;2)$, $D(2;0;0)$. Лежат ли эти точки в одной плоскости?

*Решение*: Найдем координаты векторов $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{DC}$. $\overrightarrow{DA}\{1-2;1-0;1-0\}$; $\overrightarrow{DA}\{-1;1;1\}$. Пусть $\overrightarrow{DA}=\vec{a}$; $\vec{a}\{-1;1;1\}$, $\overrightarrow{DB}\{-1-2;0-0;-1-0\}$; $\overrightarrow{DB}\{-3;0;-1\}$. Пусть $\overrightarrow{DB}=\vec{b}$; $\vec{b}\{-3;0;-1\}$, $\overrightarrow{DC}\{0-2;2-0;2-0\}$; $\overrightarrow{DC}\{-2;2;2\}$. Пусть $\overrightarrow{DC}=\vec{c}$; $\vec{c}\{-2;2;2\}$. Условие компланарности векторов:

$$\vec{a}=m\vec{b}+n\vec{c}\quad \begin{cases}-1=-3m-2n,\\ 1=m\cdot 0+n\cdot 2,\\ 1=m\cdot(-1)+n\cdot 2;\end{cases}\quad \begin{cases}3m+2n=1,\\ 2n=1,\\ -m+2n=1;\end{cases}\quad \begin{cases}n=\frac{1}{2},\\ -m+1=1,\\ 3m+2\cdot\frac{1}{2}=1;\end{cases}\quad \begin{cases}n=\frac{1}{2},\\ m=0,\\ 3\cdot 0+1=1\ \text{верно}\end{cases}$$

Итак, признак компланарности выполняется, значит, по определению векторы $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DB}$ и $\overrightarrow{DC}$ компланарны и, следовательно, точки $A$, $B$, $C$, $D$ лежат в одной плоскости. (*Ответ*: точки лежат в одной плоскости.)

Проверяются ответы диктанта, домашнего задания, вывод формул, собраются работы по индивидуальным карточкам.

**III. Формирование умений и навыков учащихся**

**Фронтальная работа с классом.**

***Задача № 425 г)***

*Дано*: $A\,(7;\ 2m+n;\ -n)$; $B\,(-5;\ -3;\ m-3)$; $K$ – середина отрезка $AB$; $k \in Ox$.

*Найти*: $m$; $n$.

*Решение*: Так как $k \in Ox$, то $k\,(x;\ 0;\ 0)$. Используя формулы координат середины отрезка $AB$, имеем $\begin{cases} x=\dfrac{7-5}{2}, \\ \dfrac{2m+n-3}{2}=0, \\ \dfrac{-n+m-3}{2}=0; \end{cases}$ $\begin{cases} x=1, \\ 2m+n-3=0, \\ m-n=3; \end{cases}$ $\begin{cases} x=1, \\ m=2, \\ n=-1; \end{cases}$.

(*Ответ*: $m=2$; $n=-1$.)

***Задача № 427.***

*Дано*: $\vec{b}\,\{2\sqrt{3};\ -6;\ 1\}$; $m = \vec{i} - 2\vec{j}$.

*Найти*: $|\vec{b}|$; $|m|$.

*Решение*: $|\vec{b}| = \sqrt{(2\sqrt{3})^2+(-6)^2+1^2} = \sqrt{12+36+1} = 7$; $\vec{m}\,\{1; -2;\ 0\}$.

$|\vec{m}| = \sqrt{1+(-2)^2+0^2} = \sqrt{5}$. (*Ответ*: $|\vec{b}| = 7$; $|\vec{m}| = \sqrt{5}$.)

Какие виды треугольников по сравнению длин сторон вы можете назвать?

Как определить вид треугольника в зависимости от длин сторон?

***Задача № 431 б).***

*Дано*: $\Delta ABC$; $A\,(3;\ 7;\ -4)$, $B\,(5;\ -3;\ 2)$, $C\,(1;\ 3;\ -10)$.

*Определить* вид $\Delta ABC$.

*Решение*: $AB = \sqrt{(5-3)^2+(-3-7)^2+(2+4)^2} = \sqrt{140}$,

$BC = \sqrt{(1-5)^2+(3+3)^2+(-10-2)^2} = \sqrt{196} = 14$,

$AC = \sqrt{(1-3)^2+(3-7)^2+(-10+4)^2} = \sqrt{56}$.

Проверим равенство $BC^2 = AC^2 + AB^2$; $196 = 140 + 56$ верно $\Rightarrow$ по теореме обратной теоремы Пифагора сделаем вывод, что $\Delta ABC$ прямоугольный с прямым углом $A$.

Решение задач повышенного уровня сложности

а) *Дано*: $A\,(2;\ 5;\ 8)$, $B\,(6;\ 1;\ 0)$.

На оси ординат найти точку $C$, равноудаленную от точек $A$ и $B$.

*Найти*: площадь $\Delta ABC$.

*Решение*:

1) По условию $C \in$ оси $OY \Rightarrow C\,(o;\ y;\ o)$ и $AC = BC$, тогда $AC^2 = BC^2$. По формуле расстояния между точками составим уравнение относительно $y$: $(0-2)^2+(y-5)^2+(0-8)^2 = (0-6)^2+(y-1)^2+(0-0)^2$, $4+(y-5)^2+64 = 36+(y-1)^2$, $(y-5)^2-(y-1)^2+32=0$, $y^2-10y+25-y^2+2y-1+32=0$, $-8y=-56$, $y=7$, $C\,(0;\ 7;\ 0)$.

2) $\Delta ABC$ – равнобедренный $\Rightarrow D$ – середина $AB$ (рис. 2);

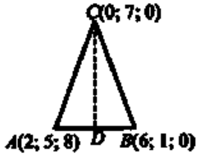


Рис. 2

$$D\left(\frac{2+6}{2}; \frac{1+5}{2}; \frac{8+0}{2}\right); D(4; 3; 4).$$

$$AB = \sqrt{(6-2)^2+(1+5)^2+(0-8)^2} = \sqrt{16+16+64} = \sqrt{96}$$

$$CD = \sqrt{(4-0)^2+(3-7)^2+(4-0)^2} = \sqrt{16+16+16} = \sqrt{48};$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CD; \quad S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{96} \cdot \sqrt{48} = \frac{1}{2} \cdot 48\sqrt{2} =$$

$= 24\sqrt{2}$. (*Ответ*: $C(0; 7; 0)$; $S_{\Delta ABC} = 24\sqrt{2}$.)

б) *Дано*: $\overrightarrow{AB}\ \{4; -4; 2\}$; $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ коллинеарны, $|\overrightarrow{BC}| = 3$.

*Найти*: координаты $\overrightarrow{AC}$.

*Решение*: Так как $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ коллинеарны по условию, то $\overrightarrow{AC}\ \{4k; -4k; 2k\}$. По правилу вычитания векторов: $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BC}\ \{4k-4; -4k+4; 2k-2\}$; $|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(4k-4)^2+(4-4k)^2+(2k-2)^2}$. По условию $|\overrightarrow{BC}| = 3$. $\sqrt{(4k-4)^2+(4-4k)^2+(2k-2)^2} = 3$, $16(k-1)^2 + 16(k-1)^2 + 4(k-1)^2 = 9$, $36(k-1)^2 = 9$, $(k-1)^2 = \frac{1}{4}$, $k - 1 = \pm 0{,}5$; $k_1 = 1{,}5$; $k_2 = 0{,}5$. (*Ответ*: $\overrightarrow{AC}\ \{6; -6; 3\}$ или $\overrightarrow{AC}\ \{2; -2; 1\}$.)

**IV. Подведение итогов**

– Сегодня на уроке мы продолжали отрабатывать умение и навыки решения стереометрических задач координатно-векторным методом. Применяли данный метод для решения задач повышенного уровня сложности.

**Домашнее задание**

I уровень: задачи № 430; 431 *а), в), г)*; 432.

***Решение задач I уровня.***

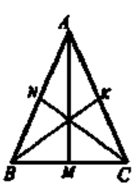


Рис. 1

***Задача № 430.***

*Дано*: $A\left(\frac{3}{2}; 1; -2\right)$, $B(2; 2; -3)$, $C(2; 0; -1)$ (рис. 1).

*Найти*: а) $P_{\Delta ABC}$ б) медианы $\Delta ABC$.

*Решение*:

а) По формуле расстояния между двумя точками найдем длины сторон $\Delta ABC$:

$$AB = \sqrt{\left(2-\frac{3}{2}\right)^2 + (2-1)^2 + (-3+2)^2} = \sqrt{0{,}25+1+1} = \sqrt{2{,}25} = 1{,}5,$$

$$BC = \sqrt{(2-2)^2+(0-2)^2+(-1+3)^2} = \sqrt{0+4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2},$$

$$AC=\sqrt{\left(2-\frac{3}{2}\right)^2+(0-1)^2+(-1+2)^2}=\sqrt{0,25+1+1}=\sqrt{2,25}=1,5.$$

Итак, $\Delta ABC$ – равнобедренный, $AB=AC$. $P_{\Delta ABC}=1,5\cdot 2+2\sqrt{2}=3+2\sqrt{2}$.

б) Так как $\Delta ABC$ равнобедренный, то медианы $BK$ и $CN$ равны, где точки

$M, N, K$ – середины сторон. $M\left(\frac{2+2}{2};\frac{2+0}{2};\frac{-3-1}{2}\right)$;

$N\left(\frac{1,5+2}{2};\frac{1+2}{2};\frac{-2-3}{2}\right)$; $N\left(\frac{7}{4};\frac{3}{2};-\frac{5}{2}\right)$.

$$BK=CN=\sqrt{\left(2-\frac{7}{4}\right)^2+\left(0-\frac{3}{2}\right)^2+\left(-1+\frac{5}{2}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2+\frac{9}{4}+\frac{9}{4}}=$$

$=\sqrt{\frac{73}{16}}=\frac{\sqrt{73}}{4}$. (*Ответ*: а) $3+2\sqrt{2}$; б) 0,5; $\frac{\sqrt{73}}{4}$; $\frac{\sqrt{73}}{4}$.)

***Задачи № 431 а), в), г).***

а) *Дано*: $\Delta ABC$; $A$ (9; 3; –5), $B$ (2; 10; –5), $C$ (2; 3; 2).

*Определить:* вид $\Delta ABC$.

*Решение*:

$$AB=\sqrt{(9-2)^2+(3-10)^2+(-5+5)^2}=\sqrt{49+49}=7\sqrt{2},$$

$$AC=\sqrt{(9-2)^2+(3-3)^2+(-5-2)^2}=\sqrt{49+49}=7\sqrt{2},$$

$$BC=\sqrt{(2-2)^2+(10-3)^2+(-5-2)^2}=\sqrt{49+49}=7\sqrt{2}.$$

$AB=AC=BC\Rightarrow\Delta ABC$ – равносторонний.

б) *Дано*: $\Delta ABC$; $A$ (5; –5; –1), $B$ (5; –3; –1), $C$ (4; –3; 0).

*Определить:* вид $\Delta ABC$.

*Решение:* $AB=\sqrt{(5-5)^2+(-5+3)^2+(-1+1)^2}=\sqrt{4}=2,$

$$AC=\sqrt{(5-4)^2+(-5+3)^2+(-1-0)^2}=\sqrt{1+4+1}=\sqrt{6},$$

$$BC=\sqrt{(5-4)^2+(-3+3)^2+(-1-0)^2}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}.$$

Проверим равенство $AC^2=AB^2+BC^2$, $(\sqrt{6})^2=2^2+(\sqrt{2})^2$, $6=4+2$, $6=6$. Следовательно, по теореме обратной теореме Пифагора делаем вывод, что $\Delta ABC$ – прямоугольный с гипотенузой $AC$.

в) *Дано*: $\Delta ABC$; $A$ (–5; 2; 0), $B$ (–4; 3; 0), $C$ (–5; 2; –2).

*Определить:* вид $\Delta ABC$.

*Решение*: $AB=\sqrt{(-5+4)^2+(2-3)^2+0}=\sqrt{2},$

$$AC=\sqrt{(-5+5)^2+(2-2)^2+(0+2)^2}=2,$$

$BC=\sqrt{(-4+5)^2+(3-2)^2+(0+2)^2}=\sqrt{1+1}+4=\sqrt{6}$. Проверим равенство $BC^2 = AB^2 + AC^2$. $(\sqrt{6})^2 = (\sqrt{2})^2 + 2^2$, $6 = 2 + 4$, $6 = 6$ верно. Значит, $\Delta ABC$ – прямоугольный с гипотенузой $BC$.

***Задача № 432.***

*Дано:* $A(-3; 4; -4)$.

*Найти:* а) расстояние от $A$ до координатных плоскостей; б) расстояние от $A$ до осей координат.

***Решение:***

а) Точка $A_1$ – проекция точки $A$ на плоскость $xOy$ имеет координаты $A_1(-3; 4; 0)$, поэтому расстояние от $A$ до $xOy$ равно $AA_1$; $AA_1 = \sqrt{(-3+3)^2 + (4-4)^2 + (-4+0)^2} = 4$. Точка $A_2$ – проекция точки $A$ на плоскость $yOz$ имеет координаты $A_2(0; 4; -4)$, поэтому расстояние от $A$ до $yOz$ равно $AA_2$; $AA_2 = \sqrt{(0+3)^2 + (4-4)^2 + (-4+4)^2} = 3$. Точка $A_3$ – проекция точки $A$ на плоскость $xOz$ имеет координаты $A_3(-3; 0; -4)$, поэтому расстояние от $A$ до $xOz$ равно $AA_3$; $AA_3 = \sqrt{(-3+3)^2 + (4-0)^2 + (-4+4)^2} = 4$.

б) Проекция точки $A$ на ось $Ox$ точка $A_x(-3; 0; 0)$, поэтому $AA_x = \sqrt{(-3+3)^2 + 4 + (-4)^2} = 4\sqrt{2}$. Проекция точки $A$ на ось $Oy$ точка $A_y(0; 4; 0)$, поэтому $AA_y = \sqrt{(-3)^2 + 0 + (-4)^2} = 5$. Проекция точки $A$ на ось $Oz$ точка $A_z(0; 0; -4)$, поэтому расстояние $AA_z = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

II уровень: задачи №437; 435 (рассмотреть 2 случая) и задача:

*Дано:* $\vec{a} = 2\vec{i} - 4\vec{k}$; $\vec{b}\{3; -1; -2\}$; вектора $\frac{1}{2}\vec{a} - 3\vec{b}$ и $\vec{c}\{m+n; -3; m-n\}$ коллинеарны.

*Найти:* $m$; $n$.

***Решение задач II уровня.***

***Задача № 437.***

*Дано:* $A(-2; 3; 5)$, $B(3; 2; -3)$.

*Найти:* точку, равноудаленную от $A$ и $B$ на оси: а) $Ox$; б) $Oy$; в) $Oz$.

***Решение:***

а) Пусть точка $M(x; 0; 0)$ искомая. По условию $AM = BM$. Составим уравнение: $\sqrt{(x+2)^2 + 9 + 25} = \sqrt{(x-3)^2 + 4 + 9}$, $x^2 + 4x + 4 + 34 = x^2 - 6x + 9 + 13$, $10x = 22 - 38$, $10x = -16$, $x = -1{,}6$, $M(-1{,}6; 0; 0)$.

б) Пусть точка $N(0; y; 0)$ искомая. Решим уравнение: $AN = BN$; $AN^2 = BN^2$; $4 + (y-3)^2 + 25 = 9 + (y-2)^2 + 9$, $29 + y^2 - 6y + 9 = 9 + y^2 - 4y + 4 + 9$, $-2y = 13 - 29$, $-2y = -16$, $y = 8$, $N(0; 8; 0)$.

в) Пусть точка $K(0; 0; z)$ искомая. Решим уравнение: $AK = BK$; $AK^2 = BK^2$, $4+9+(z-5)^2 = 9+4+(z+3)^2$, $13+z^2-10z+25 = 13+z^2+6z+9$, $-16z = 9-25$, $-16z = -16$, $z = 1$; $K(0; 0; 1)$.

(*Ответ*: $(-1{,}6; 0; 0)$, $(0; 8; 0)$, $(0; 0; 1)$.)

***Задача № 435.***

*Дано*: $A(1; 0; k)$, $B(-1; 2; 3)$, $C(0; 0; 1)$.

При каких значениях $k$ $\Delta ABC$ – равнобедренный?

***Решение***:

1. Пусть $AB = AC$, тогда $AB^2 = AC^2$. Составим и решим уравнение: $(1+1)^2+(2-0)^2+(3-k)^2 = 1+(k-1)^2$, $4+4+9-6k+k^2 = 1+k^2-2k+1$, $-4k = 2-17$, $-4k = -15$, $k = \frac{15}{4}$, $k = 3{,}75$.
2. Пусть $AB = BC$, тогда $AB^2 = BC^2$. $8+(3-k)^2 = 1+4+4$, $(3-k)^2 = 1$, $3-k = 1$ или $3-k = -1$, $k = 2$ или $k = 4$.
3. Пусть $AC = BC$, тогда $AC^2 = BC^2$. $1+(k-1)^2 = 9$, $(k-1)^2 = 8$, $k-1 = 2\sqrt{2}$ или $k-1 = -2\sqrt{2}$, $k = 1+2\sqrt{2}$ или $k = 1-2\sqrt{2}$.

(*Ответ*: $3{,}75$; $2$; $4$; $1+2\sqrt{2}$; $1-2\sqrt{2}$.)

***Дополнительная задача.***

*Дано*: $\vec{a} = 2\vec{i} - 4\vec{k}$; $\vec{b}\,\{3; -1; -2\}$; вектора $\frac{1}{2}\vec{a}$ и $3\vec{b}$ и $\vec{c}\,\{m+n; -3; m-n\}$ – коллинеарны.

*Найти*: $m$; $n$.

*Решение:* По условию вектор $\vec{a}$ имеет координаты $\vec{a}\,\{2; 0; -4\}$, вектор $\vec{d} = \frac{1}{2}\vec{a} - 3\vec{b}$ имеет координаты $\vec{d}\,\{-8; 3; 4\}$. Известно, что векторы $\vec{c}$ и $\vec{d}$ коллинеарны, $\Rightarrow$ выполняется условие: $\frac{-8}{m+n} = \frac{3}{-3} = \frac{4}{m-n}$. Исходя из этого условия, составим и решим систему:

$$\begin{cases} 3m+3n = 24, & 6m = 12, & 6n = 36, \\ 3m-3n = -12, & m = 2; & n = 6; \end{cases}$$

(*Ответ*: $m = 2$; $n = 6$.)

## Урок 7. Простейшие задачи в координатах. Контрольная работа № 1

*Цели урока*:

- закрепление навыков учащихся в использовании формул для решения задач координатно-векторным методом;
- контроль знаний и умений.

### Ход урока

**I. Организационный момент**

Сообщить учащимся тему и цели урока.

**II. Актуализация опорных знаний**

Проверка домашнего задания (форме фронтальной беседы с учащимися).

1. Какие виды треугольников получились в задании № 431? (*Ответ*: а) равносторонний; в) прямоугольный; г) прямоугольный.)

   Какие теоретические сведения использовались при решении этого задания?

2. Какие случаи рассмотрели в № 435? (*Ответ*: $AB = BC$ и $AC = BC$, $AB = AC$.)

3. Ответы заданий II уровня:

***Задача № 437*** (*Ответ*: а) (–1,6; 0; 0); б) (0; 8; 0); в) (0; 0; 1).)

Какие формулы использовались?

***Дополнительная задача.***

(Ответ: $m = 2$; $n = 6$.)

**III. Формирование навыков и умений учащихся**

1. Решить задачу № 438 (а).

*Дано*: $A$ (–1; 2; 3), $B$ (–2; 1; 2), $C$ (0; –1; 1).

*Найти:* точку, равноудаленную от этих точек и расположенную на плоскости $x0y$.

*Решение*: Пусть точка $M$ – искомая. Так как точка $M \in x0y$, то $Z_M = 0$, то есть $M(x; y; 0)$.

$$MA = \sqrt{(x+1)^2 + (y-2)^2 + (-3)^2};$$

$$MB = \sqrt{(x+2)^2 + (y-1)^2 + (-2)^2};$$

$$MC = \sqrt{x^2 + (y+1)^2 + (-1)^2}.$$

По условию $MA = MB = MC$. Решим систему:

$$\begin{cases}(x+1)^2 + (y-2)^2 + 9 = (x+2)^2 + (y-1)^2 + 4,\\ (x+1)^2 + (y-2)^2 + 9 = x^2 + (y+1)^2 + 1;\end{cases} \quad \begin{cases}-2x - 2y = -5,\\ 2x - 6y = -12;\end{cases}$$

$x = \dfrac{3}{8}$; $y = 2\dfrac{1}{8}$. (*Ответ*: $M\left(\dfrac{3}{8}; 2\dfrac{1}{8}; 0\right)$.)

***Контрольная работа № 1 по теме: «Простейшие задачи в координатах» (20 мин)*** (см. приложение).

*Ответы: I уровень: Вариант I.* 1) $\overrightarrow{AB}$ {–3; –1; 1}; 2) $\sqrt{30}$; 3) 4; 2; 1; *Вариант II.* 1) $\overrightarrow{CD}$ {–4; 1; –3}; 2) $3\sqrt{14}$; 3) 4; 3; 2.

***Решение задач II уровня.***

***Вариант I***

1) *Дано*: $\Delta ABC$; $A$ (–2; 0; 1), $B$ (–1; 2; 3), $C$ (8; –4; 9). $BM$ – медиана.

*Найти*: координаты вектора $\overrightarrow{BM}$.

*Решение*: По определению медианы, $M$ – середина отрезка $AC$. Следовательно, координаты $M$ найдем по формулам координат середины отрезка

$M\left(\frac{8-2}{2};\frac{-4+0}{2};\frac{9+1}{2}\right)$; $M(3;-2;5)$. $\overrightarrow{BM}$ $\{3+1;-2-2;5-3\}$; $\overrightarrow{BM}$ $\{4;-4;\ 2\}$.
(*Ответ*: $\{4;-4;2\}$.)

2) *Дано*: $\vec{a}\,\{-6;4;12\}$; $|\vec{b}|=7$; $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$

*Найти*: координаты вектора $\vec{в}$.

*Решение*: По условию $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}\Rightarrow\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, поэтому координаты вектора $\vec{b}$ пропорциональны координатам вектора $\vec{a}$, то есть $\vec{b}\,\{-6k;4k;12k\}$. По условию $|\vec{b}|=7$, составим уравнение: $36k^2+16k^2+144k^2=49$, $196k^2=49$, $k^2=\frac{49}{196}$, $k=\pm\frac{7}{14}=\pm\frac{1}{2}$. По условию $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}\Rightarrow k=\frac{1}{2}$. Значит, вектор $\vec{b}$ имеет координаты $\vec{b}\,\{-3;\ 2;6\}$. (*Ответ*: $\{-3;2;6\}$.)

3) *Дано*: $A\,(-1;5;3)$, $B\,(7;-1;3)$, $C\,(3;-2;6)$.

*Доказать*: $\Delta ABC$ – прямоугольный.

*Решение*: По формуле расстояния между двумя точками найдем длины отрезков $AB$, $AC$, $BC$. $AB^2=(7+1)^2+(5+1)^2+(3-3)^2$; $AB^2=64+36$; $AB^2=100$, $BC^2=(7-3)^2+(-2+1)^2+(6-3)^2$; $BC^2=16+1+9$; $BC^2=26$, $AC^2=(3+1)^2+$ $+(5+2)^2+(6-3)^2$; $AC^2=16+49+9$; $AC^2=74$.

Проверим равенство $AB^2=BC^2+AC^2$, $100=26+74$ верно.

По теореме обратной теореме Пифагора делаем вывод, что $\Delta ABC$ – прямоугольный с гипотенузой $AB$.

***Вариант II***

1) *Дано*: $\Delta ABC$; $A\,(-1;2;3)$, $B\,(1;0;4)$, $C\,(3;-2;1)$. $AM$ – медиана.

*Найти*: координаты вектора $\overrightarrow{AM}$.

*Решение*: По определению медианы $M$ – середина $BC$.

Координаты точки $M$ найдем по формулам координат середины отрезка. $M\left(\frac{3+1}{2};\frac{0-2}{2};\frac{4+1}{2}\right)$, $M(2;-1;2{,}5)$. $\overrightarrow{AM}$ $\{2+1;-1-2;\ \ 2{,}5-3\}$, $\overrightarrow{AB}$ $\{3;-3;-0{,}5\}$. (*Ответ*: $\{3;-3;-0{,}5\}$.)

2) *Дано*: $|\vec{b}|=28$, $\vec{a}\,\{-6;4;12\}$; $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$

*Найти*: координаты вектора $\vec{b}$.

*Решение*: По условию $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}\Rightarrow\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, поэтому координаты вектора $\vec{b}$ пропорциональны координатам вектора $\vec{a}$, то есть $\vec{b}\,\{-6k;4k;12k\}$. По условию $|\vec{b}|=28$, составим уравнение: $36k^2+16k^2+144k^2=784$, $196k^2=784$, $k^2=\frac{784}{196}$, $k^2=\left(\frac{28}{14}\right)^2$, $k=\pm 2$. По условию $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}\Rightarrow k=-2$.

Значит, вектор $\vec{b}$ имеет координаты $\vec{b}\,\{12;-8;-24\}$. (*Ответ*: $\{12;-8;-24\}$.)

3) *Дано*: $A\,(-1;\,5;\,3)$, $B\,(-1;\,-3;\,9)$, $C\,(3;\,-2;\,6)$.

*Доказать*: $\Delta ABC$ – прямоугольный.

*Доказательство:* По формуле расстояния между двумя точками найдем длины отрезков $AB, AC, BC$. $AB^2 = (-1+1)^2 + (5+3)^2 + (3-9)^2$; $AB^2 = 64 + 36$; $AB^2 = 100$, $AC^2 = (3+1)^2 + (-2-5)^2 + (6-3)^2$; $AC^2 = 16 + 49 + 9$; $AC^2 = 74$, $BC^2 = (3+1)^2 + (-2+3)^2 + (6-9)^2$; $BC^2 = 16 + 1 + 9$; $BC^2 = 26$.

Проверим равенство $AB^2 = AC^2 + BC^2$. $100 = 76 + 26$, верно. По теореме обратной теореме Пифагора делаем вывод, что $\Delta ABC$ – прямоугольный с гипотенузой $AB$.

***Решение заданий III уровня.***

***Вариант I***

1) *Дано*: $\Delta ABC$; $M$, $N$, $K$ – середины сторон соответственно $AB$, $BC$, $AC$. $M\,(3;\,-2;\,5)$, $N\,(3{,}5;\,-1;\,6)$, $K\,(-1{,}5;\,1;\,2)$.

*Найти*: координаты $A$, $B$, $C$.

Пусть $A\,(x_1;\,y_1;\,z_1)$, $B\,(x_2;\,y_2;\,z_2)$, $C\,(x_3;\,y_3;\,z_3)$. По формулам координат середины отрезка составим системы для абсцисс, ординат и аппликат.

Пользуясь методом сложения, решим эту систему:

$$1)\ \begin{cases} x_1 + x_2 = 6, \\ x_2 + x_3 = 7, \\ x_3 + x_1 = -3; \end{cases} \begin{cases} x_1 - x_3 = -1, \\ x_1 + x_3 = -3, \\ x_1 + x_2 = 6; \end{cases} \begin{cases} 2x_1 = -4, \\ x_1 + x_3 = -3, \\ x_1 + x_2 = 6; \end{cases} \begin{cases} x_1 = -2, \\ x_2 = 8, \\ x_3 = -1; \end{cases}.$$

$$2)\ \begin{cases} y_1 + y_2 = -4, \\ y_2 + y_3 = -2, \\ y_3 + y_1 = 2; \end{cases} \begin{cases} y_1 - y_3 = -2, \\ y_1 + y_3 = 2, \\ y_1 + y_2 = -4; \end{cases} \begin{cases} 2y_1 = 0, \\ y_1 - y_3 = -2, \\ y_1 + y_2 = -4; \end{cases} \begin{cases} y_1 = 0, \\ y_2 = -4, \\ y_3 = 2; \end{cases}.$$

$$3)\ \begin{cases} z_1 + z_2 = 10, \\ z_2 + z_3 = 12, \\ z_3 + z_1 = 4; \end{cases} \begin{cases} z_1 - z_3 = -2, \\ z_1 + z_3 = 4, \\ z_1 + z_2 = 10; \end{cases} \begin{cases} 2z_1 = 2, \\ z_1 + z_2 = 10, \\ z_1 + z_3 = 4; \end{cases} \begin{cases} z_1 = 1, \\ z_2 = 9, \\ z_3 = 3. \end{cases}.$$

(*Ответ*: $A\,(-2;\,0;\,1)$, $B\,(8;\,-4;\,9)$, $C\,(-1;\,2;\,3)$.)

2) *Дано*: $A\,(-2;\,1;\,2)$, $B\,(-6;\,3;\,-2)$, $C \in$ оси $OZ$; $AC = BC$.

*Найти*: координаты точки $C$.

*Решение:* По условию $C \in$ оси $OZ$, значит она имеет координаты $C\,(0;\,0;\,z)$ и $AC = BC$. Составим уравнение, пользуясь формулой расстояния между двумя точками: $4 + 1 + (z-2)^2 = 36 + 9 + (z+2)^2$, $5 + z^2 - 4z + 4 = 45 + z^2 + 4z + 4$, $-8z = 40$; $z = -5$. (*Ответ*: $(0;\,0;\,-5)$.)

3) *Дано*: $A\,(-2;\,1;\,2)$, $B\,(-6;\,3;\,-2)$, $C\,(0;\,0;\,-5)$; $AC = BC$.

*Найти*: $S_{\Delta ACB}$

*Решение*: По формуле координат середины отрезка $AB$ найдем координаты точки $M$ – середины: $M\left(\dfrac{-6-2}{2};\dfrac{1+3}{2};\dfrac{2-2}{2}\right)$, $M\,(-4;\,2;\,0)$.

$AB = \sqrt{(-6+2)^2 + (3-1)^2 + (2+2)^2} = \sqrt{16+4+16} = \sqrt{36} = 6$, $CM$ – высота равнобедренного $\Delta ABC$. $CM\ \sqrt{16+4+25}=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$. $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot CM$;

$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 3\sqrt{5}=9\sqrt{5}$. (*Ответ*: $9\sqrt{5}$.)

***Вариант II***

1. *Дано*: $\Delta ABC$, $M$, $N$, $K$ – середины сторон соответственно $AB$, $BC$, $AC$. $M(3; -2; -4)$, $N(-6; 4; -10)$, $K(-7; 2; -12)$.

*Найти*: координаты вершин $A$, $B$, $C$.

*Решение:* Пусть $A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$, $C(x_3; y_3; z_3)$. По формулам координат середины отрезка составим системы для абсцисс, ординат и аппликат.

При решении системы использован метод сложения.

1) $\begin{cases} x_1+x_2=6, \\ x_2+x_3=-12, \\ x_3+x_1=-14; \end{cases}$ $\begin{cases} x_1-x_3=18, \\ x_1+x_3=-14, \\ x_1+x_2=6; \end{cases}$ $\begin{cases} 2x_1=4, \\ x_1+x_3=-14, \\ x_1+x_2=6; \end{cases}$ $\begin{cases} x_1=2, \\ x_2=4, \\ x_3=-16. \end{cases}$.

2) $\begin{cases} y_1+y_2=-4, \\ y_2+y_3=8, \\ y_3+y_1=4; \end{cases}$ $\begin{cases} y_1-y_3=-12, \\ y_1+y_3=4, \\ y_1+y_2=-4; \end{cases}$ $\begin{cases} 2y_1=-8, \\ y_1+y_3=4, \\ y_1+y_2=-4; \end{cases}$ $\begin{cases} y_1=-4, \\ y_2=0, \\ y_3=8; \end{cases}$.

3) $\begin{cases} z_1+z_2=-8, \\ z_2+z_3=-20, \\ z_1+z_3=-24; \end{cases}$ $\begin{cases} z_1-z_3=12, \\ z_2+z_3=-20, \\ z_1+z_3=-24; \end{cases}$ $\begin{cases} 2z_1=-12, \\ z_2+z_3=-20, \\ z_1+z_3=-24; \end{cases}$ $\begin{cases} z_1=-6, \\ z_2=-2, \\ z_3=-18. \end{cases}$.

(*Ответ*: $A(2; -4; -6)$, $B(4; 0; -2)$, $C(-16; 8; -18)$.)

2. *Дано*: $A(4; 5; 4)$, $B(2; 3; -4)$; $C \in$ оси $OX$, $AC = BC$.

*Найти*: координаты точки $C$.

*Решение*: По условию $C \in$ оси $OX$, значит она имеет координаты $C(x; 0; 0)$ и $AC = BC$. Составим уравнение, пользуясь формулой расстояния между двумя точками: $(x-4)^2+25+16=(x-2)^2+9+16$, $x^2-8x+16+25+16=x^2-4x+4+9+16$, $-4x=-28$, $x=7$. (*Ответ*: 7; 0; 0.)

3. *Дано*: $A(4; 5; 4)$, $B(2; 3; -4)$, $C(7; 0; 0)$, $AC = BC$.

*Найти*: $S_{\Delta ABC}$.

*Решение:* Пусть точка $M$ – середина основания равнобедренного $\Delta ABC$, то есть отрезка $AB$. Тогда точка $M$ имеет координаты: $M(3; 4; 0)$. $AB=\sqrt{(2-4)^2+(3-5)^2+(-4-4)}=\sqrt{4+4+64}=\sqrt{72}=6\sqrt{2}$, $CM$ – высота $\Delta ABC$. $CM=\sqrt{(7-3)^2+(4-0)^2}=\sqrt{16+16}=4\sqrt{2}$. $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot CM$;

$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\cdot 6\sqrt{2}\cdot 4\sqrt{2}=24$. (*Ответ*: 24.)

**IV. Подведение итогов**

---

**Домашнее задание**

I уровень: повторить п. 9, № 438*б)*, 436, 439 (а);

II уровень: повторить п. 9, № 438*б)*, 436, 440.

Решение домашнего задания:

***Задача № 438 б).***

*Дано*: $A(-1; 2; 3)$, $B(-2; 1; 2)$, $C(0; -1; 1)$, $D \in (OYZ)$, $AD = BD = CD$.

*Найти*: координаты точки $D$.

*Решение:* Точка $D$ имеет координаты $D(0; y; z)$, так как она лежит в плоскости $OYZ$. Она равноудалена от точек $A$, $B$, $C$, следовательно, $\begin{cases} AD = BD, \\ AD = CD; \end{cases}$. По формуле расстояния между точками найдем длины этих

отрезков: $AD = \sqrt{(0+1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2} = \sqrt{1 + y^2 - 4y + 4 + z^2 - 6z + 9}$; $AD^2 = y^2 + z^2 - 4y - 6z + 14$; $BD^2 = (0+2)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 4 + y^2 - 2y + 1 + z^2 - 4z + 4$, $BD^2 = y^2 + z^2 - 2y - 4z + 9$; $CD^2 = (0-0)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = y^2 + {}^2y + 1 + z^2 - 2z + 1$, $CD^2 = y^2 + + z^2 + 2y - 2z + 2$. Вернемся к системе:

$$\begin{cases} y^2 + z^2 - 4y - 6z + 14 = y^2 + z^2 - 2y - 4z + 9, \\ y^2 + z^2 - 4y - 6z + 14 = y^2 + z^2 + 2y - 2z + 2; \end{cases} \begin{cases} 2y + 2z = 5, \\ 6y + 4z = 12; \end{cases} \Big| -2$$

$$\begin{cases} -4y - 4z = -10, \\ 6y + 4z = 12; \end{cases} \begin{cases} 2y + 2z = 5, \\ 2y = 2; \end{cases} \begin{cases} y = 1, \\ 2 + 2z = 5; \end{cases} \begin{cases} y = 1, \\ z = 1{,}5; \end{cases}$$. (*Ответ*: (0; 1; 1,5).

***Задача № 436.***

*Дано*: $A(4; 4; 0)$, $B(0; 0; 0)$, $C(0; 3; 4)$, $D(1; 4; 4)$.

*Доказать*: $ABCD$ – равнобедренная трапеция.

*Решение*: По формуле расстояния между двумя точками вычислим стороны четырехугольника $ABCD$:

$$AB = \sqrt{(4-0)^2 + (4-0)^2 + 0} = \sqrt{16+16} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2},$$

$$BC = \sqrt{0 + (3-0)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5,$$

$$CD = \sqrt{(1-0)^2 + (4-3)^2 + (4-4)^2} = \sqrt{1+1+0} = \sqrt{2},$$

$$DA = \sqrt{(4-1)^2 + (4-4)^2 + (0-4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5.$$

Итак, $BC = DA$.

Докажем, что $AB \parallel CD$, то есть, что $\overrightarrow{DC}$ и $\overrightarrow{AB}$ коллинеарны, то есть их координаты пропорциональны. $\overrightarrow{DC}\{0-1;\ 3-4;\ -4\}$; $\overrightarrow{DC}\{-1; -1; 0\}$. $\overrightarrow{AB}\{0-4; 0-4; 0-0\}$; $\overrightarrow{AB}\{-4; -4; 0\}$. Очевидно, что $\overrightarrow{AB} = 4\overrightarrow{DC}$. Значит, $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DC}$ коллинеарны, значит, $AB \parallel CD$. Итак, $AB \parallel CD$ и $BC = AD$. По определению, четырехугольник $ABCD$ – равнобедренная трапеция.

***Задача № 439а).***

*Дано*: $O(0; 0; 0)$, $A(4; 0; 0)$, $B(0; 6; 0)$, $C(0; 0; -2)$. $\Delta AOB$ – вписанный в окружность $W(D; r)$.

*Найти*: а) координаты центра окружности $D$; б) $r$ – радиус окружности.

*Решение*: Так как точка $D$ – центр описанной окружности, то она равноудалена от вершин треугольника $ABO$, то есть $\begin{cases} AD = BD = r, \\ AD = OD = r; \end{cases}$. Из условия задачи видно, что $A$, $O$, $B$, $D$ лежат в одной плоскости, причем, точка $O(0; 0; 0)$ совпадает с началом координат, $A(4; 0; 0)$ лежит на оси $Ox$; $B(0; 6; 0)$ лежит на оси $Oy$. Следовательно, $\Delta AOB$ лежит в плоскости $xOy$ и, значит, центр окружности описанной около $\Delta AOB$ лежит в этой же плоскости, то есть $D(x; y; O)$. Решим систему:

$$\begin{cases} AD^2 = BD^2, \\ AD^2 = OD^2, \end{cases} \begin{cases} (x-4)^2 + (y-0)^2 + 0 = (x-0)^2 + (y-6)^2 + 0, \\ (x-4)^2 + (y-0)^2 + 0 = x^2 + y^2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 8x + 16 + y^2 = x^2 + y^2 - 12y + 36, \\ x^2 - 8x + 16 + y^2 = x^2 + y^2; \end{cases} \quad \begin{cases} -8x + 12y = 20, \\ -8x + 16 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2, \\ y = 3; \end{cases}$$

$D(2; 3; 0)$. $r = AD$; $r = OD$; $r = \sqrt{x^2 + y^2}$; $r = \sqrt{2^2 + 3^2 + 0^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$. (*Ответ*: $(2; 3; 0)$; $\sqrt{13}$.)

***Задача № 440.***

*Дано*: $\Delta ABC$ – прямоугольный; $AC$, $BC$ – катеты; $AC = b$; $BC = a$; $CD = m$; $CD \perp (ABC)$; $M$ – середина гипотенузы $AB$ (рис. 1).

*Найти*: $DM$.

*Решение*: Введем прямоугольную систему координат с началом в вершине прямого угла $C$ и с осями по катетам: $Ox$ – по катету $CA$; $Oy$ – по катету $CB$, а точка $D$ будет лежать на оси $Oz$. Координаты данных точек: $A(b; 0; 0)$, $B(0; a; 0)$, $C(0; 0; 0)$, $D(0; 0; m)$,

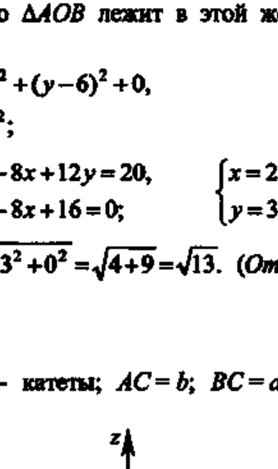



*Рис. 1*

$$M\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right), \quad M\left(\frac{b}{2}; \frac{a}{2}; 0\right);$$

$$DM = \sqrt{\left(\frac{b}{2} - 0\right)^2 + \left(\frac{a}{2} - 0\right)^2 + (0 - m)^2} = \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^2}{4} + m^2}.$$

(*Ответ*: $\sqrt{\frac{b^2 + a^2 + 4m^2}{4}} = \frac{\sqrt{b^2 + a^2 + 4m^2}}{2}$.)

## §2. Скалярное произведение векторов (4ч) (уроки 8–11)

### Урок 8. Угол между векторами. Скалярное произведение векторов

*Цели урока:*

– ввести понятие угла между векторами и скалярного произведения векторов, рассмотреть формулу скалярного произведения в координатах;

– показать применение скалярного произведения векторов при решение задач.

### Ход урока

**I. Организационный момент**

**II. Актуализация знаний учащихся**

1. Анализ контрольной работы.

Подводятся итоги контрольной работы и разбираются типичные ошибки.

2. Проверка домашнего задания.

***Задача № 439а)*** (на доске записать заранее и проверить с учащимися).

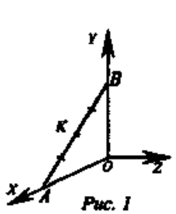


*Рис. 1*

*Дано*: $O(0; 0; 0)$, $A(4; 0; 0)$, $B(0; 6; 0)$, $\Delta AOB$ – прямоугольный (рис. 1).

*Найти*: 1) $K(x; y; z)$ – центр окружности, описанной около $\Delta AOB$; 2) $AK = R$.

*Решение:* Центр окружности $K$ – середина гипотенузы $AB$. Найдем координаты точки $K$; $x=\dfrac{4+0}{2}=2$,

$y=\dfrac{0+6}{2}=3$, $z=\dfrac{0+0}{2}=0$. $K(2; 3; 0)$. $R=AK=\sqrt{(4-2)^2+(0-3)^2+(0-0)^2}=$

$=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$. (*Ответ*: (2; 3; 0); $\sqrt{13}$.)

3. Устные упражнения

Решение задач с целью подготовить учащихся к восприятию нового материала. Фронтальная работа с классом: отвечает один из учащихся, остальные при необходимости дополняют, исправляют ответ своего товарища.

Векторы в пространстве (рис. 2).

1. *Дано*: $A(-3; -2; 4)$, $B(-4; 3; 2)$.

*Найти*: $|\overrightarrow{AB}|$.

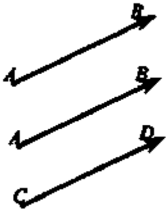



Рис. 2

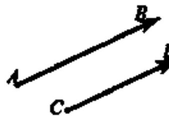



Рис. 3

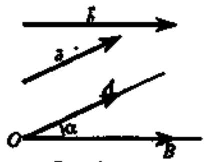



Рис. 4

2. *Дано*: $A\,(2; -3; 1)$, $B\,(4; -5; 0)$, $C\,(5; 0; -4)$ $D\,(7; -2; -3)$.

Равны ли векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$?

3. Коллинеарны ли векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$, если $A\,(1; -3; 4)$, $B\,(5; 1; -2)$, $C\,(2; 0; 1)$, $D\,(4; -2; 2)$ (рис. 3).

**III. Изучение нового материала**

Рис. 126 (учебника)

1. Ввести понятие угла между векторами $\widehat{\vec{a}\,\vec{b}} = \alpha$ (рис. 4). $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$; $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$. Если $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$, то $\widehat{\vec{a}\,\vec{b}} = 0°$, если $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$, то $\widehat{\vec{a}\,\vec{b}} = 180°$, если $\widehat{\vec{a}\,\vec{b}} = 90°$, то $\vec{a} \perp \vec{b}$.

Рис. 127 (учебник)

2. Ввести понятие скалярного произведения векторов.

Скалярное произведение двух векторов есть произведение их длин на косинус угла между ними.

*Обозначение*: $\vec{a} \cdot \vec{b}$. $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos(\widehat{\vec{a}\,\vec{b}})$. Отсюда $\cos(\widehat{\vec{a}\,\vec{b}}) = \dfrac{\vec{a}\,\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}$.

Обратить внимание, что $\vec{a}\,\vec{b}$ – число (скаляр). Скаляр – лат. *scale* – лестница, шкала. Ввел в 1845 г. У. Гамильтон, английский математик.

3. Пример применения скалярного произведения в физике (рис. 5).

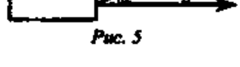



Рис. 5

Пусть под действием постоянной силы $\vec{F}$ тело совершило механическое перемещение, которое задается вектором $\vec{S}$. Если $(\widehat{\vec{F}\,\vec{S}}) = \alpha$, то для вычисления работы $A$, совершенной силой $\vec{F}$, используют формулу $A = |\vec{F}|\,|\vec{S}|\cos\alpha$, что по определению является скалярным произведением $\vec{F} \cdot \vec{S}$.

4. Доказательство утверждений рассматриваются по усмотрению учителя (в учебнике они предполагаются для самостоятельной работы).

***Утверждение 1.*** **Скалярное произведение ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы перпендикулярны.**

*Доказательство:*

1) Пусть $\vec{a} \perp \vec{b}$, тогда $\vec{a}\,\vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\alpha$, $\cos\alpha = \cos(\widehat{\vec{a}\,\vec{b}}) = \cos 90^\circ = 0$, значит, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.
2) Пусть $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, тогда $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\alpha = 0$. Но $|\vec{a}| \neq 0, |\vec{b}| \neq 0$ (ненулевые), значит, $\cos\alpha = 0$, $\alpha = 90^\circ$, $\vec{a} \perp \vec{b}$.

***Утверждение 2.*** **Скалярный квадрат вектора ($\vec{a} \cdot \vec{a}$) равен квадрату его длины. $\vec{a}^{\,2} = |\vec{a}|^2$.**

*Доказательство:* Угол между равными векторами $0^\circ$, $\cos 0^\circ = 1$.

Имеем $\vec{a}\,\vec{a} = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos 0^\circ = |\vec{a}|^2$.

5. Формула скалярного произведения двух векторов $\vec{a}\,\{x_1; y_1, z_1\}$ и $\vec{b}\,\{x_2; y_2, z_2\}$.

Через их координаты $\vec{a}\,\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$.

Скалярное произведение двух векторов равно сумме произведений соответствующих координат этих векторов.

Приведем доказательство формулы скалярного произведения в координатах для случая, когда векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ неколлинеарны (рис. 6).

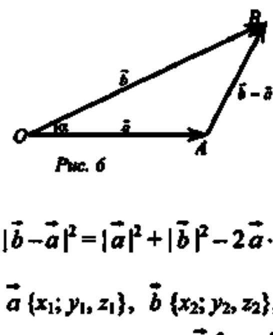



*Рис. 6*

По теореме косинусов $AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2 \cdot OA \cdot OB \cdot \cos\alpha$.

Так как $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$, то это равенство можно переписать в таком виде $|\vec{b} - \vec{a}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\alpha$, или $|\vec{b} - \vec{a}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b}$, откуда $\vec{a} \cdot \vec{b} = \dfrac{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{b} - \vec{a}|^2}{2}$ (1). Пусть $\vec{a}\,\{x_1; y_1, z_1\}$, $\vec{b}\,\{x_2; y_2, z_2\}$, тогда вектор $\vec{b} - \vec{a}$ имеет координаты $\{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$, $|\vec{a}|^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2$, $|\vec{b}|^2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2$, $|\vec{b} - \vec{a}|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$. Подставив эти выражения в равенство (1),

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}{2} - \frac{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}{2} =$$
$$= x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

**IV. Закрепление изученного материала. Формирование умений и навыков учащихся**

1. Устно.

*Дан* куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 7).

*Найдите* угол между векторами

а) $\overrightarrow{B_1B}$ и $\overrightarrow{B_1C}$;

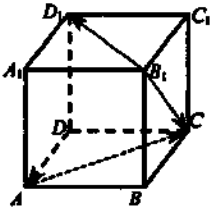


Рис. 7

б) $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AC}$;

в) $\overrightarrow{DA}$ и $\overrightarrow{B_1D_1}$.

(*Ответы*: а) 45°; б) 45°; в) 135°.)

2. Решение задач № 443 (*а, г*).

*Дано*: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб, $AB = a$, $O_1$ – центр грани $A_1B_1C_1D_1$.

*Найти*: а) $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{B_1C_1}$; г) $\overrightarrow{BA_1}\cdot\overrightarrow{BC_1}$.

*Решение*: а) Так как $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{B_1C_1}$, то $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{B_1C_1} = a\cdot a\cdot\cos 0° = a^2$.

*Способ 1.*

Треугольник $BA_1C_1$ правильный. Стороны его равны как диагонали равных квадратов: $BA_1 = BC_1 = a\sqrt{2}$, $(\widehat{\overrightarrow{BA_1}\overrightarrow{BC_1}}) = 60°$, поэтому $\overrightarrow{BA_1}\cdot\overrightarrow{BC_1} = a\sqrt{2}\cdot a\sqrt{2}\cdot\cos 60° = a^2$.

*Способ 2.*

$$\overrightarrow{BA_1}\cdot\overrightarrow{BC_1} = (\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AA_1})\cdot(\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CC_1}) = \overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CC_1}+$$
$$+\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{CC_1} = 0+0+0+a\cdot a\cdot\cos 0° = a^2.$$

*Способ 3.*

Введем прямоугольную систему координат (рис. 8).

Вектор $\overrightarrow{BA_1}$ имеет координаты $\{a; 0; a\}$, а вектор $\overrightarrow{BC_1}$ имеет координаты $\{0; a; a\}$. Поэтому $\overrightarrow{BA_1}\cdot\overrightarrow{BC_1} = a\cdot 0+0\cdot a+a\cdot a = a^2$.

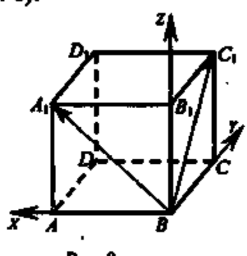


Рис. 8

***Дополнительная задача***

Вычислите угол между вектором $\vec{a}\{2; 1; 2\}$ и координатным вектором $\vec{i}$.

*Решение*: $\vec{a}\{2; 1; 2\}$, $\vec{i}\{1; 0; 0\}$, $\cos(\widehat{\vec{a}\,\vec{b}}) =$

$= \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{i}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{i}|}$; $\vec{a}\cdot\vec{i} = 2\cdot 1+1\cdot 0+2\cdot = 2$, $|\vec{a}| = \sqrt{2^2+1^2+2^2} = \sqrt{9} = 3$, $|\vec{i}| = 1$.

$\cos(\widehat{\vec{a}\,\vec{b}}) = \dfrac{2}{3\cdot 1} \approx 0{,}6667$, $(\widehat{\vec{a}\,\vec{i}}) \approx 48°11'$. (*Ответ*: 48°11′.)

3. Решить самостоятельно (по группам).

1 группа № 443 *д*); 2 группа № 443 *е*); 3 группа № 443 *ж*).

*Ответы*: д) $a^2$; е) $-\dfrac{a^2}{2}$; ж) $-\dfrac{3}{2}a^2$.

**V. Подведение итогов**

– Сегодня на уроке мы рассмотрели понятия угла между векторами скалярного произведения векторов. Вывели формулу для вычисления скалярного произведения в координатах, а также усвоили, что скалярное произведение перпендикулярных векторов равно «0» и, если скалярное произведение векторов равно «0», то векторы перпендикулярны.

---

**Домашнее задание**

П. 46; 47 (до свойств). I уровень № 441 *в–з*). II уровень № 443 *б*), *в*). III уровень.

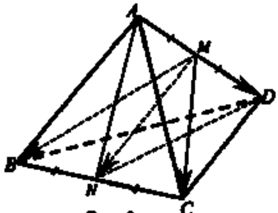


Рис. 9

***Задача.*** Все ребра тетраэдра $ABCD$ равны друг другу. Точки $M$ и $N$ – середины ребер $AD$ и $BC$ (рис. 9).

*Докажите*, что $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{AD}=0$.

*Решение:*

*Способ 1.*

$BM$ – медиана, а значит, и высота в правильном треугольнике $ABD$. Поэтому $\overrightarrow{MB}\perp\overrightarrow{AD}$. Аналогично $\overrightarrow{MC}\perp\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)$. Следовательно,

$$\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)\cdot\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{AD}\right)=\frac{1}{2}(0+0)=0.$$

*Способ 2.*

$AN=DN$ как высоты равных правильных треугольников, поэтому треугольник $AND$ равнобедренный. Следовательно, медиана $NM$ является также высотой треугольника $AND$, то есть $\overrightarrow{MN}\perp\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{\mathrm{MN}}\cdot\overrightarrow{AD}=0$.

## Урок 9. Угол между векторами. Скалярное произведение векторов

*Цели урока:*

- повторить с учащимися вопросы теории и рассмотреть основные свойства скалярного произведения;
- сформировать умения вычислять скалярное произведение векторов и находить угол между векторами.

### Ход урока

**I. Организационный момент**

**II. Проверка домашнего задания**

Заслушать ход решения задачи № 443 (в) и дополнительной задачи (III уровень) по заранее подготовленным на доске решениям.

Учащимся дается задание: внимательно выслушать решение задач и быть готовыми ответить на вопрос: «Верно ли решена задача? Какие замечания к решению у тебя есть?»

***Задача № 443 б).***

*Решение:*

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{C_1A_1}=|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{C_1A_1}|\cos(\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{C_1A_1})=a\sqrt{2}\cdot a\sqrt{2}\cdot\cos180^\circ=-2a^2.$

(*Ответ*: $-2a^2$.)

**III. Математический диктант** (см. приложение)

После написания диктанта проводится самопроверка и обсуждение задач, с которыми не справилось большинство учащихся.

**IV. Изучение нового материала**

1. Задание:

– Запишите формулу длины вектора в координатах;

– Выразите $\cos(\widehat{\vec{a}\,\vec{b}})$ из определения скалярного произведения.

– Пусть $\vec{a}\,\{x_1, y_1, z_1\}$, $\vec{b}\,\{x_2, y_2, z_2\}$.

Выразите $\cos(\widehat{\vec{a}\,\vec{b}})$ в координатах.

Имеем $\cos(\widehat{\vec{a}\,\vec{b}}) = \dfrac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$.

2. Основные свойства скалярного произведения. (По усмотрению учителя некоторые можно доказать.)

Для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и любого числа $k$ справедливы равенства:

1) $\vec{a}^2 \geq 0$, причем $\vec{a}^2 > 0$ при $\vec{a} \neq \vec{o}$.

2) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ (переместительный закон).

3) $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$ (распределительный закон).

4). $k(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (k\,\vec{a}) \cdot \vec{b}$ (сочетательный закон).

Рассмотрим для примера свойство 3. Введем прямоугольную систему координат и рассмотрим произвольные векторы $\vec{a}\,\{x_1, y_1, z_1\}$, $\vec{b}\,\{x_2, y_2, z_2\}$, $\vec{c}\,\{x_3, y_3, z_3\}$. Воспользуемся формулой скалярного произведения в координатах и тем, что координаты вектора $\vec{a} + \vec{b}$ равны суммам соответствующих координат векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$: $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = (x_1 + x_2) \cdot x_3 + (y_1 + y_2) \cdot y_3 + (z_1 + z_2) \cdot z_3 = (x_1x_3 + y_1y_3 + z_1z_3) + (x_2x_3 + y_2y_3) + z_2z_3) = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$.

3. Следует обратить внимание учащихся на то, что распределительный закон имеет место для любого числа слагаемых, а скалярное произведение, в котором каждый из сомножителей является суммой векторов, можно вычислить по правилу умножения многочленов.

Рассмотрим, например, скалярное произведение $(\vec{a}+\vec{b})(\vec{c}+\vec{d})$. Положим $\vec{a}+\vec{b}=\vec{m}$. Тогда $(\vec{a}+\vec{b})(\vec{c}+\vec{d}) = \vec{m} \cdot (\vec{c}+\vec{d}) = \vec{m} \cdot \vec{c} + \vec{m} \cdot \vec{d} = (\vec{a}+\vec{b})\vec{c} + (\vec{a}+\vec{b}) \cdot \vec{d} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{a} \cdot \vec{d} + \vec{b} \cdot \vec{d}$. Таким образом, $(\vec{a}+\vec{b})(\vec{c}+\vec{d}) = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{a} \cdot \vec{d} + \vec{b} \cdot \vec{d}$. Свойства скалярного произведения используются в процессе решения задач.

**V. Закрепление изученного материала**

1. Решение задач по готовому чертежу (рис. 1).

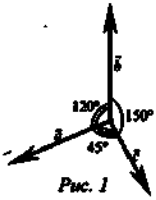


*Рис. 1*

*Дано*: $\vec{a} = 2$, $\vec{b} = 3$, $\vec{c} = 1$.

*Найти*: $(\vec{a} + \vec{c})(\vec{b} - \vec{c})$.

*Решение*:

$(\vec{a}+\vec{c})(\vec{b}-\vec{c}) = \vec{a}\,\vec{b} - \vec{a}\,\vec{c} + \vec{b}\,\vec{c} - \vec{c}\,\vec{c} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos 120° -$

$- |\vec{a}||\vec{c}|\cos 45° + |\vec{b}||\vec{c}|\cos 150° - |\vec{c}|^2 = -4 - \sqrt{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

(*Ответ*: $-4 - \sqrt{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}$.)

***Задача № 444 б), д)***

*Решение*: б) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 0$

*Вопрос*: Какими являются эти векторы? ($\vec{a} \perp \vec{b}$).

д) $\sqrt{\vec{b} \cdot \vec{b}} = \sqrt{\vec{b}^2} = |\vec{b}| = \sqrt{(1)^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$.

(*Ответ*: б) 0; д) $\sqrt{3}$.)

***Задача № 445 д).***

*Дано*: $\vec{a} = 3\vec{i} - 5\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{j} - 5\vec{k}$.

*Вычислить*: $(\vec{a} - 2\vec{b})(\vec{k} + \vec{i} - 2\vec{j})$.

*Решение*: $(3\vec{i} - 5\vec{j} + \vec{k} - 2\vec{j} + 10\vec{k})(\vec{k} + \vec{i} - 2\vec{j}) = (3\vec{i} - 7\vec{j} + 11\vec{k}) \cdot$
$\cdot (\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}) = 3\vec{i}^2 - 6\vec{i}\,\vec{j} + 3\vec{i}\,\vec{k} - 7\vec{i}\,\vec{j} + 14\vec{j}^2 - 7\vec{j}\,\vec{k} + 11\vec{i}\,\vec{k} -$
$- 22\vec{i}\,\vec{k} + 11\vec{k}^2 = 3 + 14 + 11 = 28$. (*Ответ*: 28.)

*Вопрос*: Какие свойства скалярного произведения использовали при решении этой задачи?

***Задача № 446 в).***

*Дано*: $\vec{a}\{3; -1; 1\}$, $\vec{b}\{-5; 1; 0\}$.

*Найти*: вид $(\widehat{\vec{a}\,\vec{b}})$.

*Решение*: $|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{11}$; $|\vec{b}| = \sqrt{(-5)^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{26}$,

$\cos(\widehat{\vec{a}\,\vec{b}}) = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$; $\cos(\widehat{\vec{a}\,\vec{b}}) = \frac{3\cdot(-5) + (-1)\cdot 1 + 1\cdot 0}{\sqrt{11}\cdot\sqrt{26}} = \frac{16}{\sqrt{11\cdot 26}}$ (0 ; $\cos\alpha < 0$, если $90° < \alpha < 180°$. Значит, $(\widehat{\vec{a}\,\vec{b}})$ тупой. (*Ответ*: тупой.)

2. Самостоятельное решение задач с последующей проверкой.

***I уровень***

***Задача № 449.***

*Дано*: $\vec{a} = m\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$. $\vec{b} = 4\vec{i} + m\vec{j} - 7\vec{k}$

*Найти*: значение $m$, при котором векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны.

*Решение*: $\vec{a} \perp \vec{b}$, если $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$; $\vec{a} \cdot \vec{b} = 4m + 3m - 28 = 7m -$ $- 28$, $7m - 28 = 0$; $7m = 28$; $m = 4$. (*Ответ*: 4.)

***II уровень***

*Дано*: $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$, $(\widehat{\vec{a}\,\vec{b}}) = 60°$.

*Найти*: а) $|\vec{a} + \vec{b}|$; $|2\vec{a} - 3\vec{b}|$.

*Решение*:

а) $|\vec{a}+\vec{b}| = \sqrt{(\vec{a}+\vec{b})^2} = \sqrt{\vec{a}^2+\vec{b}^2+2\vec{a}\vec{b}} = \sqrt{|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+2|\vec{a}||\vec{b}|\cos 60°} = \sqrt{7}$;

б) $2\vec{a}-3\vec{b}| = \sqrt{(2\vec{a}-3\vec{b})^2} = \sqrt{4\vec{a}^2+9\vec{b}^2-12\vec{a}\vec{b}\cos 60°} = \sqrt{4\cdot 1^2+9\cdot 2^2} =$

$= \sqrt{12\cdot 1\cdot 2\cos\frac{1}{2}} = \sqrt{4+36-12} = \sqrt{40-12} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$. (*Ответ*: а) $\sqrt{7}$;

б) $2\sqrt{7}$.)

***III уровень***

**Даны три силы $\overrightarrow{M}$ {3; –4; 2}, $\overrightarrow{N}$ {2; 3; –5}, $\overrightarrow{P}$ {–3; –2; 4}, приложенные к одной точке. Вычислите работу, производимую равнодействующей этих сил, когда точка их приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из *A* (5; 3; –7) в *B* (4; 1; –4).**

*Решение*:

1. *Найдем* равнодействующую $\vec{F} = \overrightarrow{M} + \overrightarrow{N} + \vec{P}$; $\vec{F}$ {2; –3; 1}.

2. *Найдем* вектор перемещения $\vec{S} = \overrightarrow{AB}$ {–1; –2; 3}, $A = \vec{F} \cdot \vec{S}$, $A = -$ $-2 + 6 + 3 = 7$.

(*Ответ*: $A = 7$.)

Все задачи проверяются по готовым решениям.

**VI. Подведение итогов**

– Итак, в ходе сегодняшнего урока мы рассмотрели основные свойства скалярного произведения векторов, научились применять их для вычисления скалярного произведения и нахождения углов между векторами.

---

**Домашнее задание**

I уровень: № 445 (г); 446 (в); 451 (д).

II уровень: № 453; 459 (а); 454.

III уровень: № 459 *б*).

***Дополнительные задачи***

***Задача № 1.*** *Дан* куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, ребро которого равно 1.

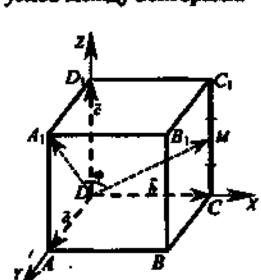



*Рис. 2*

*Найдите* угол между векторами $\overrightarrow{DA}$ и $\overrightarrow{DM}$, где точка *M* – середина ребра $CC_1$.

*Решение:*

*I способ*

Введем систему координат (рис. 2).

$D(0; 0; 0)$; $A_1(0; 1; 1)$; $M(1; 0; 0{,}5)$. $\overrightarrow{DA_1}\{0; 1; 1\}$, $\overrightarrow{DM}\{1; 0; 0{,}5\}$,

$$\cos\varphi = \frac{1\cdot 0+0\cdot 1+0{,}51}{\sqrt{1{,}25}\cdot\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}.$$

*2 способ*

$\overrightarrow{DA}=\vec{a}$; $\overrightarrow{DC}=\vec{b}$; $\overrightarrow{DD_1}=\vec{c}$. $\overrightarrow{DA_1}\cdot\overrightarrow{DM}=(\vec{a}+\vec{c})(\vec{b}+0{,}5\vec{c}) = 0{,}5$.

$|\overrightarrow{DM}|=\sqrt{1{,}25}$; $|\overrightarrow{DA_1}|=\sqrt{2}$, $\cos\varphi = \dfrac{\overrightarrow{DA_1}\cdot\overrightarrow{DM}}{\overrightarrow{DM}\cdot\overrightarrow{DA_1}} = \dfrac{1}{\sqrt{10}} = \dfrac{\sqrt{10}}{10}$.

(*Ответ*: $\dfrac{\sqrt{10}}{10}$.)

***Задача № 2***

*Дано*: $|\vec{b}|=3$, $|\vec{c}|=2$, $|\vec{d}|=1$, $(\vec{b}\,\vec{c})=60°$, $\vec{d}\perp\vec{b}$, $\vec{d}\perp\vec{c}$, $\vec{a}=\vec{b}+\vec{c}-\sqrt{6}\vec{d}$.

*Найти*: $|\vec{a}|$.

## Урок 10. Вычисление углов между прямыми и плоскостями

*Цель урока:*

- показать, как используется скалярное произведение векторов при решении задач на вычисление углов между двумя прямыми, а также между прямой и плоскостью.

## Ход урока

**I. Проверка домашнего задания**

Во время перемены консультанты проверяют домашнюю работу (предварительно обсудив ее результаты с учителем).

В начале урока – доклад консультантов о результатах проверки.

**II. Формирование новых знаний учащихся**

1. Для вычисления угла между двумя прямыми, а также между прямой и плоскостью, удобно использовать скалярное произведение. Прежде чем рассмотреть две такие задачи на вычисление углов, введем понятие направляющего вектора прямой.

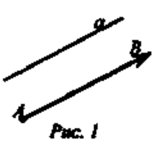


Рис. 1

Ненулевой вектор называется направляющим вектором прямой *a*, если он лежит либо на прямой *a*, либо на прямой, параллельной *a* (рис. 1).

2. Разбираются ключевые задачи 1 и 2, предложенные в учебнике (п. 48).

**III. Формирование умений и навыков учащихся**

***Задача № 464 а).***

*Дано*: $A(3; -2; 4)$, $B(4; -1; 2;)$, $C(6; -3; 2)$, $D(7; -3; 1)$.

*Найти*: угол между прямыми $AB$ и $CD$.

*Решение*: Найдем координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$. $\overrightarrow{AB}\{1; 1; -2\}$, $\overrightarrow{CD}\{1; 0; -1\}$. Так как угол между прямыми $0° < \varphi < 90°$, то $\cos\varphi > 0$. Имеем: $\cos\varphi = \dfrac{|x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$.

$$\cos\varphi = \frac{|1\cdot1+1\cdot0+(-2)\cdot(-1)|}{\sqrt{1^2+1^2+(-2)^2}\sqrt{1^2+0^2+(-1)^2}} = \frac{3}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2},\quad \text{поэтому}\quad \varphi = 30°.$$

(*Ответ*: 30°.)

***Задача № 466 а)***. *Дано*: куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, $M \in AA_1$, $AM : MA_1 = 3 : 1$, $N$ – середина $BC$ (рис. 2).

Вычислить косинус угла между прямыми $MN$ и $DD_1$.

*Решение*:

1. Введем систему координат так, как показано на рисунке (заранее – на доске).

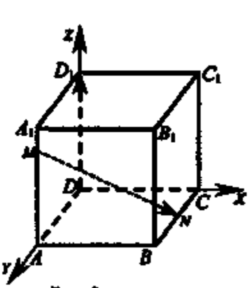


*Рис. 2*

Рассмотрим направляющие векторы $\overrightarrow{DD_1}$ и $\overrightarrow{MN}$ прямых $DD_1$ и $MN$. Пусть единица измерения отрезков выбрана так, что $AA_1 = 4$, тогда $M(0; 4; 3)$, $N(4; 2; 0)$, $\overrightarrow{MN}\{4; -2; 3\}$, $\overrightarrow{DD_1}\{0; 0; 4\}$.

2. Используя векторы $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{DD_1}$, находим косинус угла $\varphi$ между прямыми $DD_1$ и $MN$: $\cos\varphi = \dfrac{|4\cdot0-2\cdot0-3\cdot4|}{\sqrt{16+4+9}\cdot\sqrt{16}} = \dfrac{3}{\sqrt{29}}$. (*Ответ*: $\dfrac{3}{\sqrt{29}}$.)

***Дополнительная задача*** (целесообразно использовать слайд или заранее заготовить на переносной доске решение).

*Дан:* прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, $DA = 1$, $DC = 2$, $DD_1 = 3$ (рис. 3).

*Найти:* угол между прямыми $CB_1$ и $D_1B$.

*Решение*: Введем систему координат $D_{xyz}$.

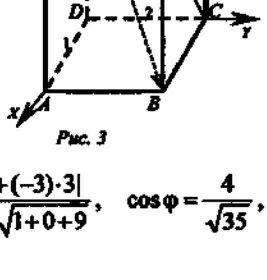


*Рис. 3*

Рассмотрим направляющие векторы $\overrightarrow{D_1B}$ и $\overrightarrow{CB_1}$ прямых $D_1B$ и $CB_1$. $D_1(0; 0; 3)$, $B(1; 2; 0)$, $\overrightarrow{D_1B}\{1; 2; -3\}$, $C(0; 2; 0)$, $B_1(1; 2; 3)$, $\overrightarrow{CB_1}\{1; 0; 3\}$.

Пусть $\varphi$ – искомый угол, $\cos\varphi = \dfrac{|1\cdot1+2\cdot0+(-3)\cdot3|}{\sqrt{1+4+9}\cdot\sqrt{1+0+9}}$, $\cos\varphi = \dfrac{4}{\sqrt{35}}$,

$\varphi \approx 47°28'$. (*Ответ*: $47°28'$.)

***Задача № 467 а)*** (предложить для самостоятельного решения двумя способами).

Проверить ответ и решение, заранее записанное на доске, или работают два ученика на переносных досках.

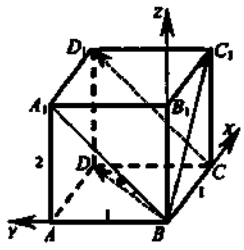



*Рис. 4*

В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $AB = BC = \frac{1}{2}AA_1$.

*Найдите* угол между прямыми $BD$ и $CD_1$ (см. рис. 4).

*Решение:*

*I способ.*

Введем систему координат, как показано на рис. 4. Пусть единица измерения отрезков выбрана так, что $AA_1 = 2$, тогда $AB = BC = 1$, $B(0; 0; 0)$, $D(1; 1; 0)$, $C(1; 0; 0)$, $D_1(1; 1; 2)$, $\overrightarrow{BD}\{1; 1; 0\}$, $\overrightarrow{CD_1}\{0; 1; 2\}$. Используя векторы $\overrightarrow{BD}$ и $\overrightarrow{CD_1}$, находим косинус угла $\varphi$ между прямыми $BD$ и $CD_1$. $\cos\varphi = \frac{|1\cdot0+1\cdot1+0\cdot2|}{\sqrt{1+1+0}\cdot\sqrt{0+1+4}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$. Отсюда, $\varphi \approx 71°34'$. (*Ответ*: 71°34'.)

*2 способ.*

Угол между прямыми $BD$ и $CD_1$ равен углу между прямыми $BD$ и $BA_1$, так как $CD_1 \| BA_1$. В $\Delta BDA_1$ имеем $BA_1 = \sqrt{5}$, $A_1D = \sqrt{5}$, по теореме Пифагора находим $BD = \sqrt{AD^2 + AB^2}$, $BD = \sqrt{2}$. По теореме косинусов $A_1D^2 = A_1B^2 + BD^2 - 2A_1B \cdot BD \cdot \cos\varphi$, отсюда, $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{10}}$, $\varphi \approx 71°34'$.

(*Ответ*: 71°34'.)

**IV. Подведение итогов**

– На примере решения этих задач мы убедились, что использование координатно-векторного способа (метода) значительно облегчает решение некоторых задач.

---

**Домашнее задание**

П. 48, № 466 *б), в)*, 465 (с решением в учебнике); для сильных учащихся № 467 *б)* – двумя способами.

*Домашнее задание*

***№ 466 б), в).***

*Дано*: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб, $M \in AA_1$; $AM : MA_1 = 3 : 1$; $N \in BC$, $BN = NC$ (рис. 5).

*Найти*: б) $\cos(\widehat{MN; BD})$; в) $\cos(\widehat{MN; B_1D})$.

*Решение*: Введем систему координат так, чтобы $B$ – начало координат; $AB \in OX$, $BC \in OY$; $BB \in OZ$, $AB = a$ – длина ребра. Тогда $B(0; 0; 0)$;

$A(a; 0; 0)$; $C(0; a; 0)$; $D(a; a; 0)$; $A_1(a; 0; a)$; $B_1(0; 0; a)$; $D_1(a; a; a)$;

$M\left(a; 0; \frac{3}{4}a\right)$; $N\left(0; \frac{a}{2}; 0\right)$. $\overrightarrow{MN}\left\{-a; \frac{a}{2}; -\frac{3}{4}a\right\}$; $|\overrightarrow{MN}| = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4} + \frac{9a^2}{16}} = \frac{a\sqrt{29}}{4}$.

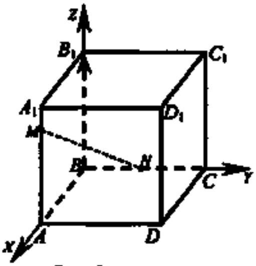


*Рис. 5*

б) $\overrightarrow{BD}\{a; a; 0\}$, $|\overrightarrow{BD}| = a\sqrt{2}$; $\cos(\widehat{\overrightarrow{MN}; \overrightarrow{BD}}) =$

$$= \frac{\left|-\frac{1}{2}a^2\right|}{a\sqrt{2} \cdot \frac{a\sqrt{29}}{4}} = \frac{2}{\sqrt{58}}.$$

в) $\overrightarrow{B_1D}\{a; a; -a\}$; $|\overrightarrow{B_1D}| = a\sqrt{3}$; $\cos(\widehat{\overrightarrow{MN}; \overrightarrow{B_1D}}) =$

$$= \frac{\left|-a^2 + \frac{a^2}{2} + \frac{3}{4}a^2\right|}{a\sqrt{3} \cdot \frac{a\sqrt{29}}{4}} = \frac{a^2}{a^2\sqrt{87}} = \frac{1}{\sqrt{87}}.$$

(*Ответ*: б) $\frac{2}{\sqrt{58}}$; в) $\frac{1}{\sqrt{87}}$.)

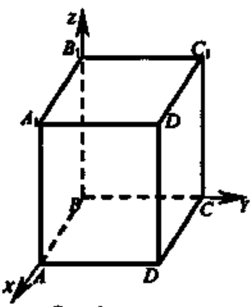


*Рис. 6*

***Задача 467 б).***

*Дано*: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямоугольный параллелепипед, $AB = BC = \frac{1}{2}AA_1$ (рис. 6).

*Найти*: $(\widehat{\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AC_1}})$.

*Решение*: Введем систему координат: $AB \in ox$, $BC \in oy$, $BB_1 \in oz$, $A(a; 0; 0)$, $B(0; 0; 0)$, $C(0; a; 0)$, $D(a; a; 0)$, $C_1(0; a; 2a)$, $A_1(a; 0; 2a)$. $\overrightarrow{AC}\{-a; a; 0\}$, $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(-a)^2 + a^2 + 0^2} = a\sqrt{2}$, $\overrightarrow{AC_1}\{-a; a; 2a\}$, $|\overrightarrow{AC_1}| = \sqrt{(-a)^2 + a^2 + (2a)^2} =$

$a\sqrt{6}$, $\cos(\widehat{\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AC_1}}) = \frac{-a\cdot(-a) + a\cdot a + 0\cdot 2a}{a\sqrt{2}\cdot a\sqrt{6}} = \frac{2a^2}{a^2\sqrt{12}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$; $(\widehat{\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AC_1}}) \approx 54°7'$.

## Урок 11. Повторение вопросов теории и решение задач

*Цель урока*:

– повторить формулы скалярного произведения в координатах, косинуса угла между данными векторами через их координаты, косинуса угла между двумя прямыми, между прямой и плоскостью.

### Ход урока

**I. Актуализация опорных знаний**

Консультанты докладывают о результатах проверки домашнего задания и один ученик у доски записывает решение № 467*б*).

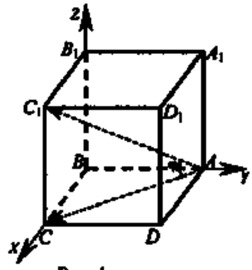



Рис. 1

*Дано*: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямоугольный параллелепипед, $AB = BC = \frac{1}{2}AA_1$ (рис. 1).

*Найти*: $(AC, AC_1)$.

*Решение*: $A(0; 1; 0)$, $C(1; 0; 0)$, $\overrightarrow{AC}\{1; -1; 0\}$, $C_1(1; 0; 2)$, $\overrightarrow{AC_1}\{1; -1; 2\}$. $\varphi = (\widehat{\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AC_1}})$,

$$\cos\varphi = \frac{|1\cdot1-1\cdot(-1)+0\cdot2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+0^2}\cdot\sqrt{1^2+(-1)^2+2^2}} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.\ \varphi = 54°42' = 54{,}7°.$$ (*Ответ*: 54,7°.)

Второй ученик заполняет на доске пропуски в формулах: а) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AM}$, б) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \vec{O}$, в) $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, значит, $\vec{b} = k\vec{a}$, $k$ – некоторое число, г) если $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ неколлинеарны, то $\vec{p} = k_1\vec{a} + k_2\vec{b} + k_3\vec{c}$, д) $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\widehat{\vec{a}\,\vec{b}})$, $\vec{a}\cdot\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$, е) $\cos\alpha = \frac{\vec{a}\,\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$; $\cos\alpha = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$, ж) если $\vec{a} \perp \vec{b}$, то $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$.

Остальные отвечают на вопросы:

– Как находят координаты вектора, если известны координаты его начала и конца?
– Как находят координаты середины отрезка? Длины вектора? Расстояние между точками?
– Как вы понимаете выражение «угол между векторами»?
– Какие векторы называются перпендикулярными?
– Что называется скалярным произведением векторов?
– Чему равно скалярное произведение перпендикулярных векторов?
– Чему равен скалярный квадрат вектора?
– Свойства скалярного произведения?
– Какой вектор называется направляющим вектором прямой $a$?

После фронтального опроса проверяется работа второго ученика (у доски) и предлагается всем учащимся самостоятельно разобрать решение задачи № 469 (а) (с последующей проверкой).

***Задача № 469 а)*** (по задаче 2 из п. 48).

*Дано*: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб; $AC \cap BD = = N$, $=M \in A_1D_1$, $A_1M : MD_1 = 1 : 4$ (рис. 2).

*Найти*: синус угла между $MN$ и плоскостью $ABCD$.

*Решение* (см. рисунок): Введем систему координат. Найдем координаты направляющего вектора прямой $MN$ и координаты вектора, перпендикулярного плоскости грани $ABCD$. Пусть $A(1; 0; 0)$, тогда $M(\frac{4}{5}; 0; 1)$, $MK \perp AD$,

$K(\frac{4}{5}; 0; 0)$, $\overrightarrow{KM}\{0; 0; 1\}$; $N(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0)$;

$\overrightarrow{MN}\left\{-\frac{3}{10}; \frac{1}{2}; -1\right\}$, $\sin\varphi = \frac{\left|\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{KM}\right|}{\left|\overrightarrow{MN}\right|\cdot\left|\overrightarrow{KM}\right|}$; $\sin\varphi =$

$$= \frac{\left|-\frac{3}{10}\cdot 0+\frac{1}{2}\cdot 0+1\cdot(-1)\right|}{\sqrt{0^2+0^2+1^2}\cdot\sqrt{\left(-\frac{3}{10}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+(-1)^2}} = \frac{10}{\sqrt{134}}.$$

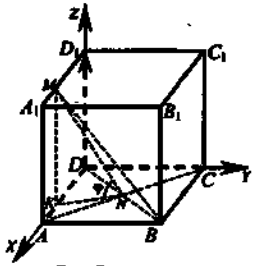


Рис. 2

(*Ответ*: $\sin\varphi = \frac{10}{\sqrt{134}}$.)

**Наиболее подготовленному ученику предлагается выполнить № 469 (а) на переносной доске с последующим разбором этого задания всем классом (при необходимости).**

## II. Формирование умений и навыков учащихся

**Совместное решение № 471, 472 (при наличии времени – чертеж заготовлен заранее; можно предложить проговорить и записать кратко решение на доске).**

***№ 471.*** *Дано*: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб (рис. 3).

*Доказать*: $(\widehat{\overrightarrow{AD_1}, \overrightarrow{DB_1}}) = 90°$.

*Доказательство*:

1. Введем систему координат.
2. $B(0; 0; 0)$, $A(a; 0; 0)$, $D(a; a; 0)$, $D_1(a; a; a)$, $B_1(0; 0; a)$.
3. $\overrightarrow{AD_1}\{0; a; a\}$; $\overrightarrow{DB_1}\{-a; -a; a\}$.

   $\overrightarrow{AD_1} \cdot \overrightarrow{DB_1} = 0 \cdot (-a) + a \cdot (-a) +$

   $+ a \cdot a = 0$. Значит $\overrightarrow{AD_1} \perp \overrightarrow{DB_1}$, то есть

   $AD_1 \perp DB_1$.

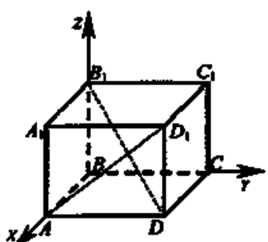


Рис. 3

***№ 472.*** (кратко) – обговорить идею решения, краткая запись решения.

*Дано*: $MNPQM_1N_1P_1Q_1$ – куб (рис. 4).

*Доказать*: $PM_1 \perp (MN_1Q_1)$; $PM_1 \perp (QNP_1)$.

*Доказательство*: Введем систему координат. Идея решения. Найти координаты векторов $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{MQ_1}$, $\overrightarrow{PM_1}$, доказать с помощью скалярного произведения, что $MN_1 \perp PM_1$ и

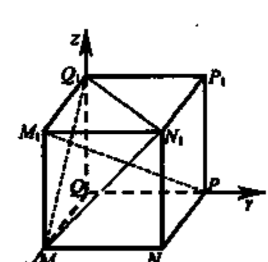


Рис. 4

$MQ_1 \perp PM$; сделать вывод по признаку перпендикулярности прямой и плоскости, что $PM_1 \perp (MN_1Q_1)$.

*Решение*: $M(1; 0; 0)$, $N_1(1; 1; 1)$, $Q_1(0; 0; 1)$, $M_1(1; 0; 1)$. $\overrightarrow{MN_1}\ \{0; 1; 1\}$, $\overrightarrow{MQ_1}\ \{-1; 0; 1\}$, $\overrightarrow{PM_1}\ \{1; -1; 1\}$, $\overrightarrow{MN_1} \cdot \overrightarrow{PM_1} = 0 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 = 0$. Значит, $\overrightarrow{MN_1} \perp \overrightarrow{PM_1}$ и $MN_1 \perp PM_1$. $\overrightarrow{MQ_1} \cdot \overrightarrow{PM_1} = -1 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) + + 1 \cdot 1 = 0$. Значит, $\overrightarrow{MQ_1} \perp \overrightarrow{PM_1}$ и $MQ_1 \perp PM_1$. Поэтому $PM_1 \perp (MN_1Q_1)$.

Аналогично доказывается, что $PM_1 \perp (QNP_1)$.

## III. Самостоятельная работа (5–7 мин.)

### *Уровень А*

***Вариант I***

*Даны* векторы $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$ и $\vec{b} = 4\vec{i} - 2\vec{k}$.

*Вычислите* $\vec{a} \cdot \vec{b}$. (*Ответ*: 6).

***Вариант II***

*Даны* векторы $\vec{a} = 5\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$ и $\vec{b} = 3\vec{j} + 2\vec{k}$.

*Вычислите* $\vec{a} \cdot \vec{b}$. (*Ответ*: 2).

*Решение*:

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 4 + (-3) \cdot 0 + 1 \cdot (-2) = 8 - 2 = 6$.
2. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 5 \cdot 0 + (-2) \cdot 3 + 4 \cdot 2 = -6 + 8 = 2$.

### *Уровень Б*

***Вариант I***

*Вычислить* угол между прямыми $AB$ и $CD$, если $A(\sqrt{3}; 1; 0)$, $B(0; 0; 2\sqrt{2})$, $C(0; 2; 0)$, $D(\sqrt{3}; 1; 2\sqrt{2})$. (*Ответ*: 60°.)

***Вариант II***

Вычислите угол между прямыми $AB$ и $CD$, если $A(6; -4; 8)$, $B(8; -2; 4)$, $C(12; -6; 4)$, $D(14; -6; 2)$. (*Ответ*: 30°).

*Решение*:

I. $\overrightarrow{AB}\ \{-\sqrt{3}; -1; 2\sqrt{2}\}$, $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (-1)^2 + (2\sqrt{2})^2} = \sqrt{12}$.

$\overrightarrow{CD}\ \{\sqrt{3}; -1; 2\sqrt{2}\}$, $|\overrightarrow{CD}| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + (-1)^2 + (2\sqrt{2})^2} = \sqrt{12}$.

$$\cos(\widehat{AB,CD}) = \frac{\left|-\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} + (-1) \cdot (-1) + (2\sqrt{2})^2\right|}{\sqrt{12} \cdot \sqrt{12}} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2},$$

$(\widehat{AB,CD}) = 60°$.

II. $\overrightarrow{AB}\ \{2; 2; -4\}$, $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + (-4)^2} = \sqrt{24}$; $\overrightarrow{CD}\ \{2; 0; -2\}$;

$|\overrightarrow{CD}| = \sqrt{2^2 + 0^2 + (-2)^2} = \sqrt{8}$.

$$\cos(\widehat{AB, CD}) = \frac{|2\cdot 2 + 2\cdot 0 + (-4)\cdot(-2)|}{\sqrt{24}\cdot\sqrt{8}} = \frac{12}{4\sqrt{12}} = \frac{\sqrt{12}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$(\widehat{AB, CD}) = 30.$

## *Уровень В*

***Вариант I***

В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ диагонали грани $ABCD$ пересекается в точке $N$, а точка $M$ лежит на ребре $A_1D_1$, причем $A_1M : MD_1 = 1 : 4$.

Вычислите синус угла между прямой $MN$ и плоскостью грани $DD_1C_1C[AA_1D_1D]$.

(*Ответы*: I. $-\frac{3}{\sqrt{134}}$, II. $-\frac{5}{\sqrt{134}}$.)

***Вариант II***

***№ 469*** (б) – I, (в) – II.

*Дано*: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб, $AC \cap BD = N$, $M \in A_1D_1$, $A_1M : MD_1 = 1 : 4$ (рис. 5).

*Найти*: б) $\sin(MN, (DD_1C_1C))$,

в) $\sin(\widehat{MN, (AA_1D_1D)})$.

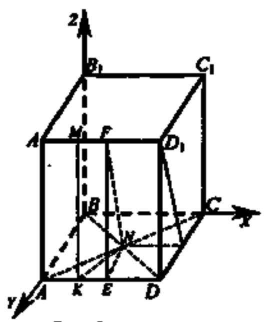


Рис. 5

*Решение*: Введем систему координат так, чтобы $B(0; 0; 0)$, $AB \in ox$, $BC \in oy$, $BB_1 \in oz$, $A(a; 0; 0)$, $C(0; a; 0)$, $D(a; a; 0)$, $B_1(0; 0; a)$, $A_1(a; 0; a)$, $C(0; a; a)$, $D_1(a; a; a)$, $D_1(a; a; a)$, $M(a; \frac{a}{5}; a)$, $N(\frac{a}{2}; \frac{a}{2}; 0)$.

Угол между прямой и плоскостью.

Угол между прямой и ее проекцией на эту плоскость.

б) $\sin(\widehat{MN, (DD_1C_1C)}) = \sin\angle MNF$; $MF = MD_1 - FD_1 = \frac{4a}{5} - \frac{a}{2} = \frac{3a}{10}$;

В $\Delta MFN : \angle F = 90°$, $MN = \frac{a\sqrt{134}}{10}$, так как $\overrightarrow{MN}\left\{\frac{a}{2}; -\frac{3a}{10}; a\right\}$, $|\overrightarrow{MN}| =$

$= \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{9a^2}{100} + a^2} = \frac{a\sqrt{134}}{10}$. Значит, $\sin\angle MNF = \frac{MF}{MN} = \frac{3a}{10} : \frac{a\sqrt{134}}{10} = \frac{3}{\sqrt{134}}$.

(*Ответ*: $\frac{3}{\sqrt{134}}$.)

в) Аналогично, $\sin(\widehat{MN, (AA_1D_1D)}) = \sin\angle EMN$, в $\Delta MNE : = 90°$, $NE = \frac{a}{2}$;

$MN = \frac{a\sqrt{134}}{10}$; $\sin\angle NME = \frac{EN}{MN} = \frac{a}{2} : \frac{a\sqrt{134}}{10} = \frac{5}{\sqrt{134}}$. (*Ответ*: $\frac{5}{\sqrt{134}}$.)

**IV. Подведение итогов**

– Мы отработали умение применять формулу скалярного произведения векторов в координатах; повторили теорию по этой теме; сформировали навык решения задач на нахождение угла между прямыми, между прямой и плоскостью.

---

**Домашняя контрольная работа**

Вариант А: № 509 (а);

Вариант Б: № 509 (б), 510 (б);

Вариант В: № 580 (а), 513 (а), 511.

***Вариант А***

***Задача № 509а).*** *Дано*: прямые $AB$ и $CD$; $A\,(7; -8; 15)$, $B\,(8; -7; 13)$, $C\,(2; -3; 5)$, $D\,(-1; 0; 4)$.

*Найти*: $\cos(\widehat{AB, CD})$.

*Решение*: $\overrightarrow{AB}\ \{1; 1; -2\}$, $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1^2+1^2+(-2)^2} = \sqrt{6}$; $\overrightarrow{CD}\ \{-3; 3; -1\}$

$|\overrightarrow{CD}| = \sqrt{(3)^2+3^2+(1)^2} = \sqrt{19}$; $\cos(\widehat{AB, CD}) = \dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{CD}|}$; $\cos(\widehat{AB, CD}) =$

$= \dfrac{1\cdot(-3)+1\cdot3+(-2)\cdot(-1)}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{19}} = \dfrac{2}{\sqrt{114}}$. (*Ответ*: $\dfrac{2}{\sqrt{114}}$.)

***Вариант Б***

***Задача № 509 б).*** *Дано*: прямые $AB$ и $CD$; $A\,(8; -2; 3)$, $B\,(3; -1; 4)$, $C\,(5; -2; 0)$, $D\,(7; 0; -2)$.

*Найти*: $\cos(\widehat{AB, CD})$.

*Решение*: $\overrightarrow{AB}\ \{-5; 1; 1\}$, $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{25+1+1} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$; $\overrightarrow{CD}\ \{2; 2; -2\}$,

$|\overrightarrow{CD}| = \sqrt{4+4+4} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$. $\cos(\widehat{AB, CD}) = \dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{CD}|}$; $\cos(\widehat{AB, CD}) =$

$= \dfrac{-5\cdot2+1\cdot2+1\cdot(-2)}{3\sqrt{3}\cdot2\sqrt{3}} = -\dfrac{5}{9}$. Так как углом между прямыми считают острый угол, то $\cos(\widehat{AB, CD}) = \dfrac{5}{9}$. (*Ответ*: $\dfrac{5}{9}$.)

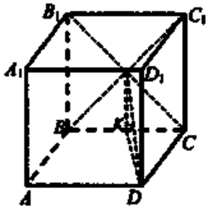


*Рис. 6*

***Задача № 510 б).***

*Дано*: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб; $M$ – центр грани $BB_1C_1C$ (Рис. 6).

*Найти*: $(\widehat{\overrightarrow{MD}, \overrightarrow{BB_1}})$

*Решение*:

1. Рассмотрим $\Delta DMD_1$ – равнобедренный; $MD = MD_1$. $DD_1 = a$; Найдем длину $MD$. Из $\Delta MKD$:

$\angle K = 90°$, $MK = \frac{a}{2}$, $DK = \sqrt{KC^2 + DC^2}$ (по теореме Пифагора), $DK = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

Значит, $MD = \sqrt{MK^2 + DK^2}$ (теорема Пифагора). $MD = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{5a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Обозначим $\angle D_1DM = \angle D$.

2. По теореме косинусов $D_1M^2 = MD^2 + DD_1^2 - 2MD \cdot DD_1 \cdot \cos\angle D$. $\frac{6a^2}{4} = \frac{a^2 \cdot 6}{4} + a^2 - 2\frac{a\sqrt{6}}{2} \cdot a \cdot \cos\angle D$; $\cos\angle D = \left(\frac{6a^2}{4} + a^2 - \frac{6a^2}{4}\right) : a^2\sqrt{6} =$

$= \frac{\sqrt{6}}{6} \approx 0{,}4082$; $\angle D_1DM = 65°54'$.

3. $(\widehat{\overrightarrow{MD}, \overrightarrow{BB_1}}) = 180° - \angle D_1DM = 179°60' - 65°54' = 114°6'$.

(*Ответ*: 114°6′.)

***Вариант В***

***№ 510 а).*** *Дано*: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб; $M$ – центр грани $BB_1C_1C$ (см. рис. 1).

*Найти*: $(\widehat{\overrightarrow{A_1D}, \overrightarrow{AM}})$.

*Решение*:

1. $\overrightarrow{A_1D} = \overrightarrow{B_1C}$ $(A_1D \parallel B_1C)$, поэтому $(\widehat{\overrightarrow{A_1D}, \overrightarrow{AM}}) = (\widehat{\overrightarrow{B_1C}, \overrightarrow{AM}})$.
2. Рассмотрим $\Delta ABM$: $\angle B = 90°$, $AM$ – наклонная, $BM$ – проекция; $BM \perp B_1C$ (свойство диагоналей квадрата). Тогда по теореме о трех перпендикулярах $AM \perp B_1C$, следовательно, $\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{B_1C}$, значит, $(\widehat{\overrightarrow{A_1D}, \overrightarrow{AM}}) = 90°$.

(*Ответ*: $(\widehat{\overrightarrow{A_1D}, \overrightarrow{AM}}) = 90°$.)

***Задача № 513 а).*** *Дано*: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб; $M \in BB_1$, $BM : MB_1 = 3 : 2$, $N \in AD$, $AN : ND = = 2 : 3$ (Рис. 7).

*Найти*: $\sin(\widehat{\overrightarrow{MN}, (DD_1C_1C)})$.

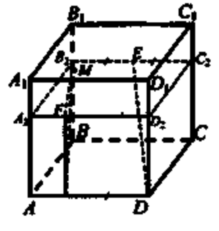



*Рис. 7*

*Решение*: $MM_1 \parallel AD$, $ND = EM = \frac{3}{5}a$, значит, $EM_1 = MM_1 - ME = \frac{2}{5}a$. Угол между $MN$ и $(DD_1C_1C)$, то же самое, что угол между $ED$ и $(DD_1C_1C)$, а по определению угол между прямой и плоскостью это угол между прямой и ее проекцией на эту плоскость, то есть $\sin(\widehat{\overrightarrow{MN}, (DD_1C_1C)}) = \sin\angle EDM_1 = \frac{EM_1}{DE}$. $DE = MN$, а $MN$ найдем из

$\Delta MBN: \angle B = 90°,\ MB = \dfrac{3}{5}a,\ BN = \sqrt{a^2 + \left(\dfrac{2a}{5}\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{29}}{5}$ (теореме Пифагора). $MN = \sqrt{MB^2 + BN^2}$, $MN = \sqrt{\dfrac{29a^2}{25} + \dfrac{9a^2}{25}} = \dfrac{a\sqrt{38}}{5}$. Отсюда $\sin\angle EDM_1 = = \dfrac{2}{5}a : \dfrac{a\sqrt{38}}{5} = \dfrac{2}{\sqrt{38}}$. (*Ответ*: $\dfrac{2}{\sqrt{38}}$.)

***Задача № 511.***

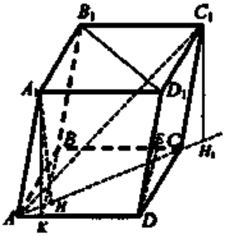



*Рис. 8*

*Дано*: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – параллелепипед; $\angle BAA_1 = \angle BAD = \angle DAA_1 = 60°$; $AB = AA_1 = AD = 1$ (рис. 8).

*Найти*: $|\overrightarrow{AC_1}|, |\overrightarrow{BD_1}|$.

*Решение*:

1. $BB_1D_1D$ – прямоугольник, так как $BD = = DD_1 = 1$, то $BB_1D_1D$ – квадрат, значит, $BD_1 = \sqrt{BD^2 + DD_1^{\,2}}$ (теореме Пифагора); $|\overrightarrow{BD_1}| = \sqrt{2}$.

2. $A_1H \perp (ABC)$ – высота параллелепипеда. $A_1K \perp AD$ – высота грани $(AA_1D)$; так как $\angle A = 60°$, то $AK = \dfrac{1}{2}AA_1 = \dfrac{1}{2}$. $BK \perp AB$ – высота грани $(ABC)$; $BK = DE$ – они разделили $AC$ на 3 равные части $AH = \dfrac{1}{3}AC$. $AC^2 = AD^2 + DC^2 - 2AD \cdot DC \cdot \cos 120°$ (по т. косинусов)

$AC^2 = 1 + 1 + 1 = 3$. Значит, $AC = \sqrt{3}$. Отсюда, $AH = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

$A_1H = \sqrt{AA_1^{\,2} - AH^2}$; $A_1H = \sqrt{1 - \dfrac{1}{3}} = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$. (теореме Пифагора).

3. Из $\Delta AC_1H_1: \angle H_1 = 90°$, $MH_1 = AC + \dfrac{1}{3}AC$; $AH_1 = \sqrt{3} + \dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.

$C_1H_1 = A_1H = \sqrt{\dfrac{2}{3}}\ AC_1 = \sqrt{AH_1^{\,2} + C_1H_1^{\,2}}$, $C_1H_1 = \sqrt{\dfrac{2}{3} + \dfrac{16}{3}} = = \sqrt{\dfrac{18}{3}} = \sqrt{6}$. Значит, $|\overrightarrow{AC_1}| = \sqrt{6}$.

(*Ответ*: $|\overrightarrow{BD_1}| = \sqrt{2}$; $|\overrightarrow{AC_1}| = \sqrt{6}$.)

## §3. Движения (4ч)
## (уроки 12–15)

### Урок 12. Движения. Центральная симметрия. Зеркальная симметрия. Осевая симметрия. Параллельный перенос

*Цель урока:*

– познакомить учащихся с понятиями движения пространства и основными видами движений.

### Ход урока

**I. Организационный момент**

**II. Актуализация знаний учащихся**

Разобрать задания, предложенные на предыдущем уроке в самостоятельной работе, с которыми не справилось большинство учащихся. Работу над ошибками рекомендуется выполнить дома.

**III. Изучение нового материала**

1. Ввести понятие отображения пространства на себя.
   – Если каждой точке $M$ пространства поставлена в соответствие некоторая точка $M_1$, причем любая точка $M_1$ пространства оказалась поставленной в соответствие какой-то точке $M$, то говорят, что задано отображение пространства на себя.
2. Отметим, что особую роль в геометрии играют отображения пространства на себя, сохраняющие расстояние между точками. Они называются движениями пространства.

Таким образом, если при движении пространства точки $A$ и $B$ переходят (отображаются) в точки $A_1$ и $B_1$, то $AB = A_1B_1$.

Класс разделить на 4 группы, каждая из которых готовит доказательство одного из утверждений:

*1 группа.* Примером движения может служить центральная симметрия – отображения пространства на себя, при котором любая точка $M$ переходит в симметричную ей точку $M_1$ относительно данного центра $O$.

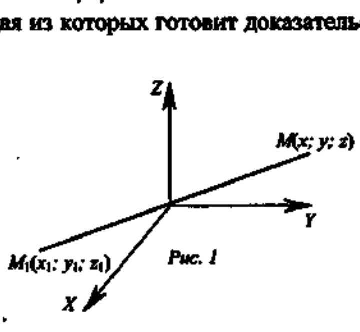


*Рис. 1*

*Центральная симметрия* (рис. 1)

– Докажем, что центральная сим-симметрия является движением.

*Примерный ход рассуждений.*

Обозначим буквой $O$ центр симметрии и введем прямоугольную систему координат $O_{xyz}$ с началом в точке $O$. Установим связь между координатами двух точек $M(x; y; z)$ и $M_1(x_1; y_1; z_1)$, симметричных относительно точки $O$. Если точка $M$ не совпадает с центром $O$, то $O$ – середина отрезка $MM_1$. По формулам для координат середины отрезка получаем

$$\frac{x+x_1}{2}=0;\ \frac{y+y_1}{2}=0;\ \frac{z+z_1}{2}=0;$$

откуда $x_1=-x; y_1=-y; z_1=-z.$

Эти формулы верны и в том случае, когда точки $M$ и $O$ совпадают.

Рассмотрим теперь любые две точки $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$ и докажем, что расстояние между симметричными им точками $A_1$ и $B_1$ равно $AB$.

$$A_1(-x_1; -y_1; -z_1) \text{ и } B_1(-x_2; -y_2; -z_2).$$

По формуле расстояния между точками находим

$$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2},$$

$$A_1B_1=\sqrt{(-x_2+x_1)^2+(-y_2+y_1)^2+(-z_2+z_1)^2}.$$

Из этих соответствий ясно, что $AB=A_1B_1$.

***Вывод:*** центральная симметрия является движением.

*2 группа.* .*О*: Осевой симметрией с осью $a$ называется такое отображение пространства на себя, при котором любая точка $M$ переходит в симметричную ей точку $M_1$ относительно оси $a$.

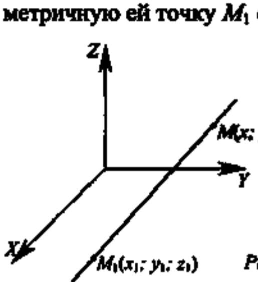


*Рис. 2*

*Осевая симметрия* (рис. 2)

– Докажем, что осевая симметрия является движением.

*Примерный ход рассуждений.*

Введем прямоугольную систему координат $Oxyz$ так, чтобы ось $Oz$ совпадает с осью симметрии, и установим связь между координатами двух точек $M(x; y; z)$ и $M_1(x_1; y_1; z_1)$, симметричных относительно оси $Oz$.

Если точка $M$ не лежит на оси $Oz$, то ось $Oz$:

1) проходит через середину отрезка $MM_1$ и

2) перпендикулярна к нему.

Из первого условия по формулам для координат середины отрезка получаем

$$\frac{x+x_1}{2}=0 \text{ и } \frac{y+y_1}{2}=0,$$
$$\text{тогда } x_1=-x;\ y_1=-y.$$

Второе условие означает, что аппликаты точек $M$ и $M_1$ равны: $z_1 = z$.

Полученные формулы верны и в том случае, когда точка $M$ лежит на оси $OZ$.

Рассмотрим теперь любые две точки $A\ (x_1; y_1; z_1)$ и $B\ (x_2; y_2; z_2)$ и докажем, что расстояние между симметричными им точками $A_1$ и $B_1$ равны $AB$.

Точки $A_1$ и $B_1$ имеют координаты

$$A_1\ (-x_1; -y_1; z_1) \text{ и } B_1\ (-x_2; -y_2; z_2).$$

По формуле расстояния между двумя точками находим:

$$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2},$$
$$A_1B_1=\sqrt{(-x_2+x_1)^2+(-y_2+y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

Из этих соотношений ясно, что $AB = A_1B_1$, то есть симметрия является движением.

*3 группа.* Зеркальной симметрией (симметрией относительно плоскости $\alpha$) называется такое отображение пространства на себя, при котором любая точка $M$ переходит в симметричную ей относительно плоскости $\alpha$ точку $M_1$.

*Зеркальная симметрия* (рис. 3) .

Докажем, что зеркальная симметрия является движением.

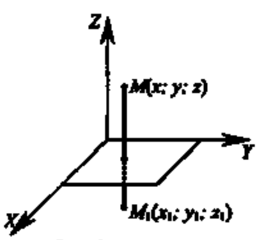


*Рис. 3*

– Введем прямоугольную систему координат $Oxyz$ так, чтобы плоскость $Oxy$ совпала с плоскостью симметрии и установим связь между координатами двух точек $M\ (x; y; z)$ и $M_1\ (x_1; y_1; z_1)$ симметричных относительно плоскости $Oxy$. Если точка $M$ не лежит в плоскости $Oxy$, то эта плоскость:

1) проходит через середину отрезка $MM_1$ и

2) перпендикулярна к нему.

Из первого условия по формуле координат середины отрезка получаем

$\dfrac{z+z_1}{2}=0$, откуда $z_1 = z$.

Второе условие означает, что отрезок $MM_1$ параллелен оси $Oz$, и, следовательно, $x_1 = x$, $y_1 = y$.

Полученные формулы верны и в том случае, когда точка $M$ лежит в плоскости $Oxy$.

Рассмотрим любые две точки $A\ (x_1; y_1; z_1)$ и $B\ (x_2; y_2; z_2)$ и докажем, что $AB = A_1B_1$ $A_1\ (x_1; y_1; -z_1)$ и $B_1\ (x_2; y_2; -z_2)$

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2},$$

$$A_1B_1 = \sqrt{(-x_2 + x_1)^2 + (-y_2 + y_1)^2 + (-z_2 + z_1)^2}$$ , то есть $AB = A_1B_1$

*Вывод*: зеркальная симметрия является движением.

***4 группа.*** Параллельным переносом на вектор $\vec{p}$ называется отображение пространства на себя, при котором любая точка $M$ переходит в такую точку $M_1$, что $\overrightarrow{MM_1} = \vec{p}$ (рис. 4).

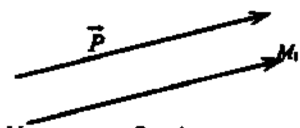



*Рис. 4*

Докажем, что параллельный перенос является движением.

При параллельном переносе на вектор $\vec{p}$ любые две точки $A$ и $B$ переходят в точки $A_1$ и $B_1$ такие, что $\overrightarrow{AA_1} = \vec{p}$ и $\overrightarrow{BB_1} = \vec{p}$ (рис. 5).

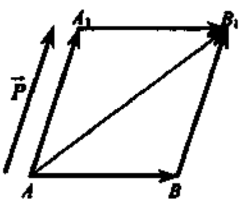



*Рис. 5*

*Доказать*, что $A_1B_1 = AB$. По правилу треугольника $\overrightarrow{AB_1} = \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{A_1B_1}$. С другой стороны $\overrightarrow{AB_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB_1}$.

Из этих двух равенств получаем $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB_1}$, или $\vec{P} + \overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{AB} + \vec{P}$, откуда $\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{AB}$. Из последнего равенства следует, что $A_1B_1 = AB$, то есть параллельный перенос – движение.

*Задание учащимся:*

Выяснить, в какую фигуру при любом движении переходит отрезок, прямая, плоскость.

*Ответ*: при движении отрезок переходит в отрезок, прямая – в прямую, плоскость – в плоскость.

## IV. Закрепление изученного материала


*Рис. 6*

1. ***Задача № 478*** – устно.

2. Разобрать решение задачи № 479 *а*).

*Докажите*, что при центральной симметрии прямая, не проходящая через центр симметрии, отображается на параллельную ей прямую.

*Решение*:

1) Рассмотрим центральную симметрию пространства с центром $O$ и произвольную прямую $AB$, не проходящую через точку $O$ (рис. 6).

Прямая $AB$ и точка $O$ определяют единственную плоскость $\alpha$. Точка $A$ и $B$ переходят при данной симметрии в точки $A_1$ и $B_1$, также лежащие в плоскости $\alpha$. Поэтому и вся прямая $A_1B_1$ лежит в плоскости $\alpha$.

2) Докажем сначала, что прямые $AB$ и $A_1B_1$ параллельны.

$\Delta OAB = \Delta OA_1B_1$, т.к. $OA = OA_1$, $OB = OB_1$, $\angle AOB = \angle A_1OB_1$.

Из равенства треугольников следует, что $\angle ABO = \angle A_1B_1O_1$, т.е. равны накрест лежащие углы при пересечении прямых $AB$ и $A_1B_1$ секущей $BB_1$. Следовательно, $AB \parallel A_1B_1$.

3) Докажем теперь, что при центральной симметрии с центром $O$ прямая $AB$ отображается на прямую $A_1B_1$. Для этого нужно доказать, что произвольная точка $M$ прямой $AB$ переходит в некоторую точку $M_1$ прямой $A_1B_1$, и обратно: произвольная точка прямой $A_1B_1$ симметрична относительно $O$ некоторой точке прямой $AB$.

Возьмем на прямой $AB$ произвольную точку $M$ (отличную от $A$) и проведем прямую $MO$.

Она пересекает прямую $A_1B_1$ в какой-то точке $M_1$.

$\Delta MAO = \Delta M_1A_1O$, так как $AO = A_1O$; $\angle MOA = \angle M_1OA_1$ (как вертикальные); $\angle MAO = \angle M_1A_1O$ (накрест лежащие). Поэтому $MO = MO_1$, а это значит, что точка $M$ переходит при симметрии относительно $O$, в точку $M_1$, лежащую на прямой $A_1B_1$. Аналогично доказывается обратное: любая точка $M_1$ прямой $A_1B_1$ симметрична некоторой точке $M$ прямой $AB$ относительно $O$.

Итак, при симметрии с центром $O$ прямая, не проходящая через точку $O$, отображается на параллельную прямую $A_1B_1$.

**V. Подведение итогов урока**

– Сегодня на уроке мы показали, что отображение пространства на себя, сохраняющее расстояние между точками, является движением. Примерами тому служат центральная, осевая, зеркальная симметрия, параллетный перенос. Мы также убедились, что при движении отрезок переходит в равный ему отрезок, прямая – в прямую, плоскость – в плоскость.

---

**Домашнее задание**

П. 49, 50, 51, 52 *b*); вопросы: 15, 16, 17; № 480 *а*).

1. Выучить основные понятия и доказательства теорем, подготовиться к самостоятельной работе.
2. Ответы на вопросы № 15, 16, 17 выполнить письменно.
3. Индивидуальное задание учащимся: подготовить сообщения: «Симметрия в природе», «Симметрия в технике».
4. Рекомендации к задаче № 480 *а*):
   – доказать, что при центральной симметрии с центром $O$ плоскость $\alpha$ отображается на плоскость $\alpha_1$, можно разными способами:
     1) аналогично тому, как при решении задачи № 479 (а) было доказано, что прямая $AB$ отображается на прямую $A_1B_1$,
     2) можно решить задачу № 486 (б), из утверждения которой следует, что плоскость $\alpha$ отображается на плоскость $\alpha_1$.

## Урок 13. Решение задач по теме «Движения»

*Цели урока:*

– закрепление теоретических знаний по изучаемой теме;
– совершенствование навыков решения задач.

### Ход урока

**I. Организационный момент**

**II. Актуализация знаний учащихся**

Фронтальная работа с классом: теоретический опрос по вопросам:

1. Что называется движением пространства?
2. Приведите примеры движений.
3. Какое отображение пространства на себя называется центральной симметрией?
4. Какое отображение пространства на себя называется осевой симметрией?
5. Что называется зеркальной симметрией?
6. Какое отображение пространства на себя называется параллельным переносом?
7. Какие координаты имеет точка $A$, если при центральной симметрии с центром $A$ точка $B$ (1; 0; 2) переходит в точку $C$ (2; –1; 4). (*Ответ*: $A$ (1,5; –0,5; 3).)
8. Как расположена плоскость по отношению к осям координат $Ox$ и $Oz$, если при зеркальной симметрии относительно этой плоскости точка $M$ (2; 2; 3) переходит в точку $M_1$ (2; –2; 3). (*Ответ*: Плоскость, относительно которой рассматривается зеркальная симметрия при которой точка $M$ (2; 2; 3) переходит в точку $M_1$ (2; –2; 3), параллельна осям $Ox$ и $Oz$.)
9. В какую перчатку (правую или левую) переходит правая перчатка при зеркальной симметрии? (*Ответ*: в левую), осевой симметрии? (*Ответ*: левую), центральной симметрии? (*Ответ*: правую).

В то время, когда идет фронтальная работа с классом, ученик решает задачу № 480 (а) у доски (проверка домашнего задания).

***Задача № 480 а).***

*Докажите*, что при центральной симметрии плоскость, не проходящая через центр симметрии, отображается на параллельную ей плоскость.

***Решение:***

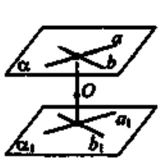



*Рис. 1*

1) Рассмотрим центральную симметрию пространства с центром $O$ и произвольную плоскость $\alpha$, не проходящую через точку $O$ (рис. 1).

Пусть прямая $a$ и $b$, пересекающиеся в точке $A$, лежат в плоскости $\alpha$. При симметрии с центром $O$ прямые $a$ и $b$ переходят соответственно в параллельные прямые

$a_1$ и $b_1$ (см. № 479 *а*). При этом точка $A$ переходит в некоторую точку $A_1$, лежащую как на прямой $a_1$, так и на прямой $b_1$, а значит, прямые $a_1$ и $b_1$ пересекаются.

Пересекающиеся прямые определяют единственную плоскость, т.е. прямые $a_1$ и $b_1$ определяют плоскость $\alpha_1$. По признаку параллельности плоскостей $\alpha \parallel \alpha_1$.

2) Далее можно доказать, что при центральной симметрии с центром $O$ плоскость $\alpha$ отображается на плоскость $\alpha_1$. Это можно доказать как в задаче № 479.1*а*), где было доказано, что прямая $AB$ отображается на прямую $A_1B_1$.

**III. Решение задач**

***Задача № 483а).***

При зеркальной симметрии относительно плоскости $\alpha$ плоскость $\beta$ отображается в плоскость $\beta_1$. Докажите, что если $\beta \parallel \alpha_1$, то $\beta_1 \parallel \alpha$.

*Решение*: Доказательство проведем методом от противного. Предположим, что $\beta \parallel \alpha$, но плоскости $\beta_1$ и $\alpha$ пересекаются. Тогда они имеют общую точку $M$. Так как $M \in \alpha$, то при данной зеркальной симметрии точка $M$ отображается в себя. Отсюда следует, что точка $M$, которая принадлежит плоскости $\beta_1$, лежит также в плоскости $\beta$. Но тогда плоскости $\alpha$ и $\beta$ пересекаются. Полученное противоречие показывает, что наше предложение неверно, следовательно, $\beta_1 \parallel \alpha$.

**IV. Самостоятельная работа** (см. приложение)

**V. Подведение итогов**

– Сегодня мы закрепили теоретические знания по теме «Движения» и отработали навыки использования их в процессе решения задач различного уровня сложности.

---

**Домашнее задание**

Решить задачи: № 480 (б), 483 (б) (подобные были рассмотрены на уроках);

***Дополнительные задачи:***

***№ 519*** (Указание: рассмотреть линейные углы двугранных углов, образованных плоскостями $\alpha$ и $\beta$, $\alpha$ и $\beta_1$).

***№ 520*** (Указание: взять на плоскость $\alpha$ две пересекающиеся прямые и воспользоваться задачей № 484).

**Центральная симметрия** (рис. 2)

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2},$$

$$A_1B_1 = \sqrt{(-x_2 + x_1)^2 + (-y_2 + y_1)^2 + (-z_2 + z_1)^2}.\ AB = A_1B_1$$

1. Докажите, что центральная симметрия есть движение.
2. Дан тетраэдр *MABC*. Постройте фигуру, центрально-симметричную этому тетраэдру относительно точки $O$ (рис. 3).

Слайд содержит теоретический материал справочного характера. По нему можно повторить теорию, провести опрос учащихся.

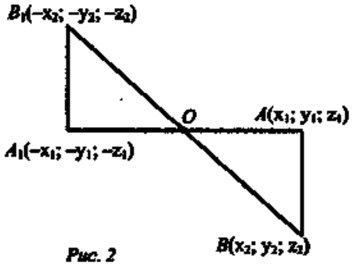



*Рис. 2*

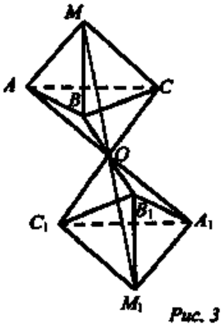



*Рис. 3*

Этот слайд может быть использован при проверке результатов самостоятельной работы (I уровень).

**Зеркальная симметрия**

Плоскость $\alpha$ совпадает с плоскостью $Oxy$ (рис. 4).

Точки $O_1$ и $O_2$ – середины отрезков $AA_1$ и $BB_1$.

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2},$$

$$A_1B_1 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (-z_2 + z_1)^2}.$$

$AB = A_1B_1$

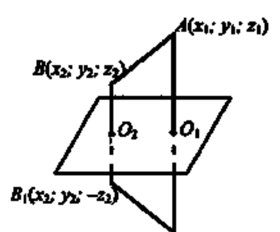



*Рис. 4*

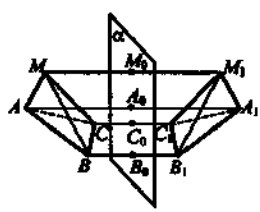



*Рис. 5*

1. Докажите, что зеркальная симметрия есть движение (рис. 5).
2. Дан тетраэдр *MABC*. Постройте фигуру, зеркально-симметричную этому тетраэдру относительно плоскости $\beta$.

## Урок 14. Контрольная работа № 5.2 по теме «Скалярное произведение векторов в пространстве. Движения»

*Цель урока:*

– проверить знания, умения и навыки учащихся по теме «Скалярное произведение векторов в пространстве. Движения».

## Ход урока

### I. Организационный момент

Сообщить тему урока, сформулировать цель урока, нормы оценки данной работы и основные требования к оформлению решения задач.

### II. Выполнение контрольной работы

Текст контрольной работы раздать учащимся в распечатанном виде (см. приложение).

### III. Подведение итогов

---

### Домашнее задание

1. Решить задачи, с которыми не справился ученик во время контрольной работы. В конце урока (после окончания работы) можно вывесить ответы и указания к решению задач, вошедших в контрольную работу (условия задач контрольной работы в распечатанном виде выдаются учащимся на дом).
2. Повторить теорию главы V «Метод координат в пространстве». § 1–3, с. 100–120 (п. 42–49).

Решение задач вошедших в контрольную работу № 5.2.

*I уровень*

***Вариант I***

1. *Дано*: $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$; $\vec{a} = 6\vec{i} - 8\vec{k}$, $|\vec{b}| = 1$, $\vec{c}$ $(4, 1, m)$; $(\widehat{\vec{a}\,\vec{b}}) = 60°$.

*Найти*: а) $\vec{a} \cdot \vec{b}$; б) значение $m$, при котором $\vec{a} \perp \vec{c}$.

*Решение*:

а) $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\widehat{\vec{a}\,\vec{b}})$; $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_1^2 + a_3^2}$. $\vec{a}$ $(a_1, a_2, a_3)$; $\vec{a}$ $(6; 0; -8)$;

$|\vec{a}| = \sqrt{36 + 0 + 64} = 10$; $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 10 \cdot \cos 60° = 10 \cdot \dfrac{1}{2} = 5$.

б) $\vec{a} \perp \vec{c}$, если $\vec{a} \cdot \vec{c} = 0$; $\vec{a} \cdot \vec{c} = 6 \cdot 4 + 0 \cdot 1 + (-8) \cdot m = 24 - 8\ m$, так как $\vec{a} \cdot \vec{c} = 0$, то $24 - 8m = 0$, $m = 3$.

(*Ответ*: а) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 5$; б) $m = 3$.)

2. *Дано*: $A\ (3; -1; 3)$; $C\ (2; 2; 3)$; $B\ (3; -2; 2)$; $D\ (1; 2; 2)$.

*Найти*: угол между прямыми $AB$ и $CD$.

*Решение*: Рассмотрим направляющие векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ прямых $AB$ и $CD$. Найдем координаты $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ : $\overrightarrow{AB}$ $(0; -1; -1)$; $\overrightarrow{CD}$ $(-1; 0; -1)$. Для нахождения угла $J$ между прямыми $AB$ и $CD$ воспользуемся формулой $\cos\varphi = \dfrac{|x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$, где $\{x_1; y_1; z_1\}$ – координаты вектора $\overrightarrow{AB}$; $\{x_2; y_2; z_2\}$ – координаты $\overrightarrow{CD}$. $\cos\varphi = \dfrac{|0 \cdot (-1) + (-1) \cdot 0 + (-1) \cdot (-1)|}{\sqrt{0+1+1} \cdot \sqrt{1+0+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \dfrac{1}{2}$;

$\cos\varphi = \frac{1}{2}$, следовательно $J = 60°$. (*Ответ*: 60°.)

3. *Дано*: $DABC$ – правильный тетраэдр, $AB = a$, $D \to D_1$ при симметрии относительно плоскости $ABC$ (рис. 1).

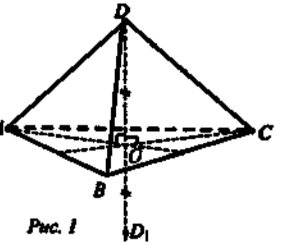


*Рис. 1*

*Найти*: $DD_1$.

*Решение*:

1. $DO \perp (ABC)$ $O \in (ABC) \Rightarrow 10 \to 0$. $D \to D_2 : OD = OD_1$ (симметрия относительно плоскости является движением, т.е. сохраняет расстояние между точками) $DD_1 = 2OD$.
2. Найдем длину $DO$ из $\Delta DOC$: $\angle DOC = 90°$; $DC = a$ (по условию); точка $O$ – центр описанной около $\Delta ABC$ окружности $\Rightarrow$ $OC = R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$;

$DO = \sqrt{DC^2 - OC^2}$. $DO = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = \sqrt{\frac{2a^2}{3}} = a\sqrt{\frac{2}{3}}$; $DD_1 = 2a\sqrt{\frac{2}{3}}$.

(*Ответ*: $2a\sqrt{\frac{2}{3}}$.)

***Вариант II***

1. *Дано*: $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$; $\vec{a} = 4\vec{j} - 3\vec{k}$, $\vec{c}$ $(2, m, 8)$; $|\vec{b}| = \sqrt{2}$; $(\vec{a}\ \vec{b}) = 45°$.

*Найдите*: а) $\vec{a} \cdot \vec{b}$; б) значение $m$, при котором $\vec{a} \perp \vec{c}$.

*Решение*:

а) $\vec{a}$ $(0; 4; -3)$, $|\vec{a}| = \sqrt{0+16+9} = 5$; $\vec{a} \cdot \vec{b} = 5\sqrt{2}\cos 45° = 5\sqrt{2}\ \frac{\sqrt{2}}{2} = 5$.

б) $\vec{a} \perp \vec{c} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{c} = 0$. $0 \cdot 2 + 4 \cdot m - 3 \cdot 8 = 0$. $4m - 24 = 0$. $m = 6$.

(*Ответ*: а) 5; б) $m = 6$.)

2. *Дано*: $A\,(1; 1; 2)$, $B\,(0; 1; 1)$, $C\,(2; -2; 2)$, $D\,(2; -3; 1)$.

*Найти*: угол между прямыми $AB$ и $CD$.

*Решение*: Аналогично заданию 2 (Вариант № 1) имеем: $\overrightarrow{AB}$ $(-1; 0; -1)$; $\overrightarrow{CD}$ $(0; -1; -1)$. $\cos\varphi = \frac{|(-1)\cdot 0 + 0\cdot(-1) + (-1)\cdot(-1)|}{\sqrt{1+0+1}\cdot\sqrt{0+1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$; $\varphi = 60°$.

(*Ответ*: 60°.)

3. *Дано*: $DABC$ – правильный тетраэдр, $AB = a$, $(ABC) \to (A_1B_1C_1)$ при симметрии относительно точки $D$ (рис. 2).

*Найти*: расстояние между плоскостями $ABC$ и $A_1B_1C_1$.

*Решение*:

1. Симметрия относительно точки является движением, следовательно сохраняет расстояние между соответствующими точками. Более того $(ABC) \parallel (A_1B_1C_1)$, $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$, а $DO = DO_1$. $2DO = OO_1$.

2. Аналогичные вычисления (№ 3 Вариант № 1) приводят к аналогичному результату.

(*Ответ*: $2a\sqrt{\dfrac{2}{3}}$.)

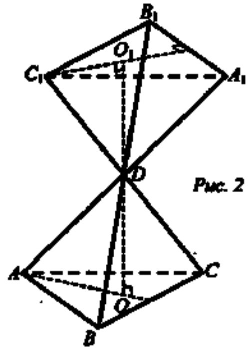


*Рис. 2*

### *II уровень*

**Вариант I**

1. *Дано*: $\vec{m}=\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c}$, $\vec{n}=2\vec{a}\ \ \vec{b}$, $|\vec{a}|=2$; $|\vec{b}|=3$; $(\widehat{\vec{a}\ \vec{b}})=60°$. $\vec{c}\perp\vec{a}$; $\vec{c}\perp\vec{b}$.

*Найти*: $\vec{m}\cdot\vec{n}$.

*Решение*: $\vec{m}\cdot\vec{n}=(\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c})(2\vec{a}-\vec{b})=2\vec{a}^2-\vec{a}\cdot\vec{b}+4\vec{a}\,\vec{b}-2\vec{b}^2-2\vec{a}\,\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{b}$, $\vec{a}\cdot\vec{c}=0$, так как по условию $\vec{c}\perp\vec{a}$. $\vec{c}\cdot\vec{b}=0$, так как $\vec{c}\perp\vec{b}$. $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos(\widehat{\vec{a}\ \vec{b}})$; $\vec{a}\cdot\vec{b}=2\cdot3\cos60°=$ $=2\cdot3\cdot\dfrac{1}{2}=3$. $\vec{a}^2=|\vec{a}|^2$; $\vec{b}^2=|\vec{b}|^2$. Подставим значения скалярных произведений векторов $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ в $\vec{m}\cdot\vec{n}$: $\vec{m}\cdot\vec{n}=2\cdot|\vec{a}|^2-2|\vec{b}|^2+3\cdot\vec{a}\,\vec{b}=$ $=2\cdot4-2\cdot9+3\cdot3=-1$. (*Ответ*: −1.)

2. *Дано*: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб, $DM=MD_1$ (рис. 3).

*Найти:* угол между прямыми $AD_1$ и $BM$.

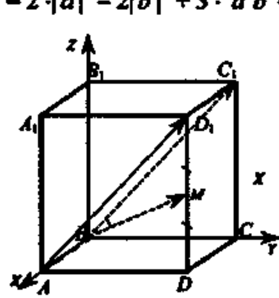


*Рис. 3*

*Решение*:

1. Введем систему координат $Bxyz$.
2. Рассмотрим направляющие векторы $\overrightarrow{AD_1}$ и $\overrightarrow{BM}$ прямых $AD_1$ и $BM$. $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC_1}$, следовательно $(\widehat{\overrightarrow{AD_1}\ \overrightarrow{BM}})=$ $=(\widehat{\overrightarrow{BC_1}\ \overrightarrow{BM}})=\varphi$. Для нахождения угла между прямыми воспользуемся формулой $\cos\varphi=\dfrac{|x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2+z_1\cdot z_2|}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$, где $\overrightarrow{BM}$ $(x_1, y_1, z_1)$, $\overrightarrow{BC_1}$ $(x_2, y_2, z_2)$. Пусть ребро куба $AB=a$, тогда $B\,(0;0;0)$; $C_1\,(0;a;a)$; $M\,(a;a;\dfrac{a}{2})$; $\overrightarrow{BC_1}$ $(0;a;a)$; $\overrightarrow{BM}$ $(a;a;\dfrac{a}{2})$. $\cos\varphi=$

$$=\frac{0\cdot a+a\cdot a+a\cdot\dfrac{a}{2}}{\sqrt{0+a^2+a^2}\cdot\sqrt{a^2+a^2+\dfrac{a^2}{4}}}=\frac{\dfrac{3}{2}a^2}{a\sqrt{2}\cdot\dfrac{3}{2}a}=\frac{1}{\sqrt{2}};\ \varphi=45°.$$ (*Ответ*: 45°.)

3. *Дано*: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб, $AB=a$, $B_1\to B_2$ при симметрии относительно плоскости $CC_1D_1$ (рис. 4).

*Найдите*: $AB_2$.

***Решение***:

1. Построим точку $B_2 : B_1 \to B_2$; $B_1C_1 \perp C_1D$; $C_1B_1 = C_1B_2$.

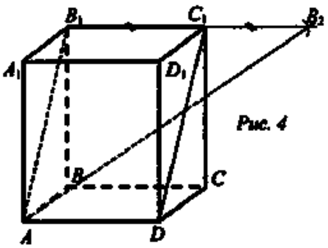


*Рис. 4*

2. Рассмотрим $\Delta AB_1B_2$: $\angle AB_1B_2 = 90°$ (так как $B_1B_2 \perp A_1B_1C_1$ $B_1B_2 \perp AB_1$). $AB_1 = a\sqrt{2}$; $B_1B_2 = 2a$. $AB_2 = \sqrt{AB_1^2 + B_1B_2^2}$; $AB_2 = \sqrt{(a\sqrt{2})^2 + (2a)^2} = \sqrt{2a^2 + 4a^2} = a\sqrt{6}$. (*Ответ*: $a\sqrt{6}$.)

***Вариант II***

1. *Дано*: $\vec{m} = 2\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$; $\vec{n} = \vec{a} - 2\vec{b}$; $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$; $(\vec{a}\ \vec{b}) = 60°$, $\vec{c} \perp \vec{a}$, $\vec{c} \perp \vec{b}$.

*Найти*: $\vec{m} \cdot \vec{n}$.

*Решение*: $\vec{m} \cdot \vec{n} = (2\vec{a} - \vec{b} + \vec{c})(\vec{a} - 2\vec{b}) = 2\vec{a}^2 - 4\vec{a}\ \vec{b} - \vec{a}\ \vec{b} + 2\vec{b}^2 + \vec{a}\ \vec{c} - 2\vec{b}\ \vec{c} = 2|\vec{a}|^2 - 5\vec{a} \cdot \vec{b} + 2|\vec{b}|^2$. $\vec{a} \cdot \vec{c} = 0$, $\vec{b} \cdot \vec{c} = 0$, так как $\vec{a} \perp \vec{c}$, $\vec{c} \perp \vec{b}$

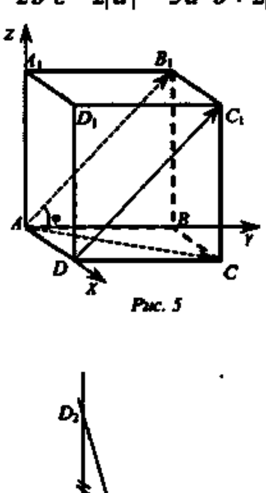


*Рис. 5*

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a}\ \vec{b})$; $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 3\frac{1}{2} = 3$. $\vec{m} \cdot \vec{n} = 2 \cdot 9 - 5 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 18 - 15 + 8 = 11$. (*Ответ*: 11.)

2. *Дано*: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб (рис. 5).

*Найти*: угол между прямыми $AC$ и $DC_1$.

*Решение*:

1. Введем систему координат $Axyz$.
2. Направляющие векторы $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{DC_1}$ прямых $AC$ и $DC$. Используя формулу $\cos\varphi$ (приведенную в решении задач варианта 1) найдем $\varphi$. $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$, следовательно $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DC_1}) = (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB_1}) = \varphi$. Пусть $AB = a$, тогда $A(0; 0; 0)$; $\overrightarrow{AB_1}$ $(0; a; a_2)$; $\overrightarrow{AC}$ $(a; a; 0)$;

$$\cos\varphi = \frac{0 \cdot a + a \cdot a + a \cdot 0}{\sqrt{0 + a^2 + a^2} \cdot 1\sqrt{a^2 + a^2 + 0}} = \frac{a^2}{a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{2}} = \frac{1}{2};\ \varphi = 60°. \text{ (Ответ: } 60°.)$$

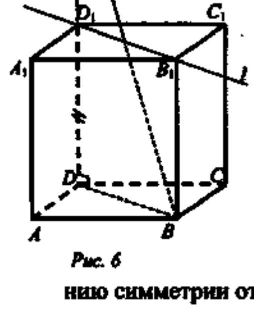


*Рис. 6*

3. *Дано*: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб, $AB = a$, $D \to D_2$ при симметрии относительно прямой $B_1D_1$ (рис. 6).

*Найдите*: $BD_2$.

*Решение*:

1. $DD_1 \perp A_1D_1C_1$. $DD_1 = D_1D_2$ (по определению симметрии относительно прямой).

2. $\Delta DD_2B$ – прямоугольный; $DD_2 = 2a$; $DB = a\sqrt{2}$. $BD_2 = \sqrt{4a^2 + 2a} = a\sqrt{6}$. (*Ответ*: $a\sqrt{6}$.)

## III уровень

**Вариант I**

1. *Дано*: $\vec{a}$, $\vec{b}$; $|\vec{a}| = 6$; $|\vec{b}| = 3$, $(\vec{a}\,\vec{b}) = = 120°$.

*Найдите*: $|\vec{a} + 2\vec{b}|$

*Решение*: $|\vec{a} + 2\vec{b}|^2 = (\vec{a} + 2\vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 4\vec{a}\,\vec{b} + 4\vec{b}^2 = |\vec{a}|^2 + 4\cdot\vec{a}\cdot\vec{b} + 4|\vec{b}|^2$; $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\vec{a}\,\vec{b})$; $\vec{a}\cdot\vec{b} = 6\cdot 3\cdot\cos 120° = 18\cdot\cos(180° - 60°) = -18\cdot$ $\cdot\cos 60° = -18\cdot\frac{1}{2} = -9$. $|\vec{a} + 2\vec{b}| = \sqrt{6^2 + 4(-9) + 4\cdot 9} = \sqrt{36} = 6$. (*Ответ*: 6.)

2. Дано: $DABC$ – пирамида; $DA \perp DB \perp DC$; $DA = DB = DC = a$ (рис. 7).

*Найдите*: угол между плоскостями $DAB$ и $ABC$.

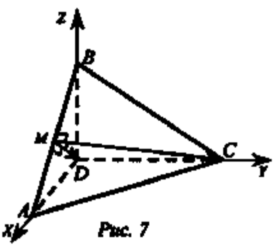


*Рис. 7*

*Решение*:

1) $AC = AD = DC$, $\Delta ABC$ – правильный.
2) Угол между плоскостями измеряется величиной двугранного угла. $MC \perp AB \Rightarrow$ $\Rightarrow DM \perp AB$ (теорема о трех перпендикулярах). $\angle CMD$ – угол между плоскостями $DAB$ и $ABC$. $\cos\angle CMD = \dfrac{\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MD}}{|\overrightarrow{MC}|\cdot|\overrightarrow{MD}|}$.
3) $D(0; 0; 0)$, $A(a; 0; 0)$, $B(0; a; 0)$, $C(0; a; 0)$, $M(\frac{a}{2}; 0; \frac{a}{2})$. $\overrightarrow{MC}(-\frac{a}{2}; a; -\frac{a}{2})$: $\overrightarrow{MD}(-\frac{a}{2}; 0; -\frac{a}{2})$. $\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MD} = -\frac{a}{2}\cdot\left(-\frac{a}{2}\right) + a\cdot 0 + \left(-\frac{a}{2}\right)\cdot\left(-\frac{a}{2}\right) = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{2}$; $|\overrightarrow{MC}| = \sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$; $|\overrightarrow{MD}| = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4}} = \frac{a}{\sqrt{2}}$; $\cos\angle CMD = \frac{a^2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{2\cdot a\sqrt{3}\cdot a} = \frac{1}{\sqrt{3}}$; $\angle CMD = \arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$.

3. *Дано*: $a$; $\alpha$;. $a \parallel \alpha$; при движении $a \to a_1$, $\alpha \to \alpha_1$ (рис. 8).

*Доказать*: $a_1 \parallel \alpha_1$

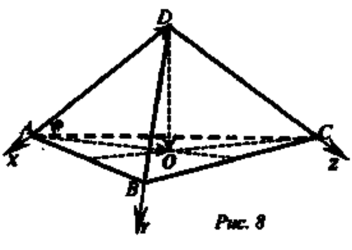


*Рис. 8*

Если по условию $a \parallel \alpha$, то все точки прямой находятся на одинаковом расстоянии от $\alpha$.

Предположим, что при движении $\alpha_1 \nparallel \alpha_1$, значит, $a_1 \cap \alpha_1 = M$, так как точки прямой $a_1$ находятся на различных расстояниях от плоскости $\alpha_1$, а это противоречит тому, что при движении расстояние между точками сохраняется. Значит, предположение неверное, т.е. $a_1 \parallel \alpha_1$, что и требовалось доказать.

***Вариант II***

1. *Дано:* $\vec{a}, \vec{b}, |\vec{a}| = 7; |\vec{b}| = \sqrt{2}; (\vec{a}\ \vec{b}) = 135°$

*Найти:* $|\vec{a} - 3\vec{b}|$

*Решение:* $|\vec{a} - 3\vec{b}|^2 = (\vec{a} - 3\vec{b})^2 = \vec{a}^2 - 6\vec{a}\cdot\vec{b} + 9\vec{b}^2 = |\vec{a}|^2 - 6|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$ $\cdot \cos 135° + 9|\vec{b}|^2$; $|\vec{a} - 3\vec{b}| = \sqrt{49 - 6\cdot 7\cdot\sqrt{2}\cos(180° - 45°) + 9\cdot 2} =$

$$= \sqrt{49 + 42\sqrt{2}\cos 45° + 18} = \sqrt{49 + \frac{42\cdot\sqrt{2} + 8}{\sqrt{2}}} = \sqrt{49 + 42 + 18} = \sqrt{109}.$$

(*Ответ*: $\sqrt{109}$.)

2. *Дано:* $DABC$ – пирамида. $DA \perp DB \perp DC$; $DA = DB = DC = a$.

*Найти:* угол между прямой $DA$ и плоскостью $ABC$.

*Решение:*

1. $DO \perp$ пл. $ABC$.
2. $\varphi = \angle DAO$; Введем систему координат $DABC$; $D\,(0; 0; 0)$; $A\,(a; 0; 0)$; $B\,(0; a; 0)$; $C\,(0; 0; a)$ $DO \perp (ABC)$. $\cos\varphi = 1 = \dfrac{\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AO}}{|\overrightarrow{AD}|\cdot|\overrightarrow{AO}|}$; $\Delta ABC$ – правильный. $\overrightarrow{DO} = \dfrac{1}{3}(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC})$; $\overrightarrow{DO} = \dfrac{1}{3}(a; a; a) = (\dfrac{a}{3}; \dfrac{a}{3}; \dfrac{a}{3})$;

$\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DO}$; $\overrightarrow{AO} = \{-a; 0; 0\} + \{\dfrac{a}{3}; \dfrac{a}{3}; \dfrac{a}{3}\}$; $\overrightarrow{AO} = \{-\dfrac{2}{3}a; \dfrac{a}{3}; \dfrac{a}{3}\}$;

$|\overrightarrow{AO}| = \sqrt{\dfrac{4}{9}a^2 + \dfrac{a^2}{9} + \dfrac{a^2}{9}} = \sqrt{\dfrac{6a^2}{9}} = a\sqrt{\dfrac{2}{3}}$; $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AD} = -\dfrac{2a}{3}\cdot(-a) + \dfrac{a}{3}\cdot 0 +$

$+ \dfrac{a}{3}\cdot 0 = \dfrac{2a^2}{3}$; $\cos\varphi = \dfrac{2a^2\cdot\sqrt{3}}{3\cdot a\cdot a\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$; $\varphi = \arccos\sqrt{\dfrac{2}{3}}$;

(*Ответ*: $\arccos\sqrt{\dfrac{2}{3}}$.)

3. *Дано:* $b$; $\beta$; $b \cap \beta = M$, $b \perp \beta$; $b \to b_1$, $\beta \to \beta_1$ (рис. 9).

*Доказать*, что $b_1 \perp \beta_1$.

*Решение:* Выберем произвольные точки $A \in \beta$; $B \in \beta$; $C \in \beta$, $b \perp \beta \Rightarrow AM \perp \beta$ и $\Delta AMB$ и $\Delta AMC$ – прямоугольные. $AM^2 = AB^2 - BM^2 = AC^2 - CM^2$. При движении $AB = A_1B_1$; $AM = A_1M_1$; $AC = A_1C_1$; $A_1M_1^2 = A_1B_1^2 - B_1M_1^2 \Rightarrow A_1M_1 \perp B_1M_1$. $A_1M_1^2 = A_1C_1^2 - C_1M_1^2 \Rightarrow A_1M_1 \perp C_1M_1$, таким образом, $A_1M_1 \perp \beta_1$ (по признаку перпендикулярности прямой и плоскости, следовательно, $b_1 \perp \beta_1$, что и требовалось доказать.

*Результат движения:*

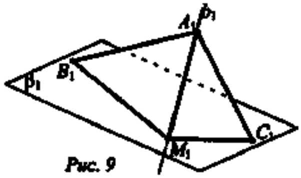
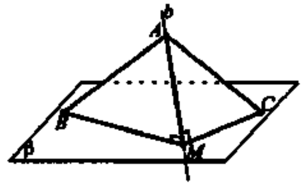



Рис. 9




## Урок 15. Зачет по теме «Метод координат в пространстве»

*Цель урока:*

– проверить теоретические знания учащихся, их умения и навыки применять эти знания в решении задач векторным, векторно-координатным способами.

### Ход урока

**I. Организационный момент**

1. Сообщить тему урока и его цель;
2. Раздать карточки-задания;
3. Пояснить уровень сложности заданий, вошедших в работу (карточку).

Каждая карточка содержит три задания: № 1 и № 2 – теоретические, причем № 2 с доказательством; № 3 включает в себя задачу.

Предложены задачи трех уровней сложности: задача № 1 – I уровень; задача № 2 – II уровень и задача № 3 – III уровень.

**II. Выполнение работы (по карточкам)** (см. приложение)

---

**Домашнее задание**

Решение задачи оставшегося уровня (после выбора на зачет), а также задач, содержащихся в карточке соседа по парте (карточки-задания в распечатанном виде выдаются учащимся на дом).

***Решение задач вошедших в зачет.***

**Карточка 1.**

*№ 1. Дано*: $\vec{a}$ (4; 1; –2), $\vec{b}$ (3; *m*; 2).

*Найдите* значение *m*, при котором $(\widehat{\vec{a}\,\vec{b}})$ будет: а) острым; б) прямым; в) тупым.

*Решение*: $(\widehat{\vec{a}\,\vec{b}})$ – острый, если $\cos(\widehat{\vec{a}\,\vec{b}}) > 0$; $(\widehat{\vec{a}\,\vec{b}})$ – прямой, если $\cos(\widehat{\vec{a}\,\vec{b}}) = 0$; $(\widehat{\vec{a}\,\vec{b}})$ – тупой, если $\cos(\widehat{\vec{a}\,\vec{b}}) < 0$; $(\widehat{\vec{a}\,\vec{b}}) = y$. $\cos y = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$; $\vec{a}\ \ \vec{b} = 12 + m - 4 = 8 + m$; $|\vec{a}| = \sqrt{16+1+4} = \sqrt{21}$; $|\vec{b}|$,

$|\vec{a}|>0$ при $y$ знак $\cos y$ будет зависеть от знака $(\vec{a}\cdot\vec{b})$. Если $8+m>0$, $m>-8$. $8+m=0$, $m=-8$. $8+m<0$, $m<-8$. (*Ответ*: а) при $m>-8$; б) $m=-8$; в) $m<-8$.)

*№ 2. Дано*: $\vec{a}$ $(-2; 3; 1)$; $\vec{b}$ $(1; 4; -3)$.

*Найти* значения $k$, при которых угол между векторами $\vec{a}+k\vec{b}$ будет: а) острый; б) прямой; в) тупой.

*Решение*: $(\vec{a}+k\vec{b})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{b}+k\vec{b}^2$; $\vec{a}\cdot\vec{b}=-2\cdot1+3\cdot4+1\cdot(-3)=-2+$ $+12-3=7$. $\vec{b}^2=|\vec{b}|^2$; $|\vec{b}|=\sqrt{1+16+9}=\sqrt{26}$; $(\vec{a}+k\vec{b})\cdot\vec{b}=7+k\cdot26$. Если $7+26k>0$, то $\varphi$ – острый; $7+26k=0$, то $\varphi$ – прямой; $7+26k<0$, то $\varphi$ – тупой. (*Ответ*: а) $k>-\frac{7}{26}$; б) $k=-\frac{7}{26}$; в) $k<-\frac{7}{26}$.)

*№ 3. Дано*: $\Delta ABC$; $A(m; -3; 2)$, $B(9; -1; 3)$, $C(12; -5; -1)$ (рис. 1).

*Определите* значение $m$, при котором $\angle C$ $\Delta ABC$ тупой.

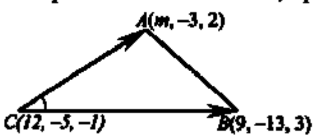



*Рис. 1*

*Решение*: $\angle C$ – тупой, если $\cos C<0$. $\cos\angle C=\frac{\overline{CA}\cdot\overline{CB}}{|\overline{CA}|\cdot|\overline{CB}|}$; $|\overline{CA}|>0$, $|\overline{CB}|>0$. Определим значение $m$, при котором $\overline{CA}\cdot\overline{CB}<0$. $\overline{CA}=(m-12; -3+5; 2+1)=$ $=(m-12; 2; 3)$. $\overline{CB}=(9-12; -1+5; 3+1)=(-3; 4; 4)$. $\overline{CA}\cdot\overline{CB}=-3(m-$ $-12)+2\cdot4+3\cdot4=-3m+36+8+12=-3m+56$. $-3m+56<0$. $-3m<-56$. $m>\frac{56}{3}$. $m>18\frac{2}{3}$. (*Ответ*: при $m>18\frac{2}{3}$.)

**Карточка 2.**

*№ 1. Дано*: $A(1; 1; 2)$, $B(0; 1; 1)$, $C(2; -2; 2)$ и $D(2; -3; 1)$.

*Найти:* угол между прямыми $AB$ и $CD$.

*Решение*: Рассмотрим направляющие векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ прямых $AB$ и $CD$. $\overrightarrow{AB}$ $(0-1; 1-1; 1-2)$; $\overrightarrow{AB}$ $(-1; 0; -1)$. $\overrightarrow{CD}$ $(2-2; -13+2; 1-2)$; $\overrightarrow{CD}$ $(0; -1; -1)$. $\cos\varphi=\frac{|\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}|}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{CD}|}$; $\cos\varphi=\frac{-1\cdot0+0\cdot(-1)+(-1)\cdot(-1)}{\sqrt{1+0+1}\cdot\sqrt{0+1+1}}=\frac{0+0+1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$; $\varphi=60°$. (*Ответ*: 60°.)

*№ 2. Дано*: $A(1; 1; 0)$, $B(3; -1; 0)$, $C(4; -1; 2)$, $D(0; 1; 0)$.

*Вычислим* угол между прямыми $AB$ и $CD$.

*Решение*: $\overrightarrow{AB}$ $(2; -2; 0)$; $\overrightarrow{CD}$ $(-4; 2; -2)$. $\cos\varphi=\frac{|-8-4+0|}{\sqrt{8}\cdot\sqrt{24}}=$

$$=\frac{12}{\sqrt{4\cdot2\cdot3\cdot8}}=\frac{12}{8\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2};\ \varphi=30°.$$

*№ 3. Дано*: куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 2).

*Найти:* угол между прямыми $AB_1$ и $A_1D$.

*Решение*: Введем систему координат $Dxyz$. Пусть $AB = a$, тогда и $D(0; 0; 0)$; $C(0; a; 0)$; $A(a; 0; 0)$; $B(a; a; 0)$. Рассмотрим направляющие векторы $\overrightarrow{AB_1}$ и $\overrightarrow{A_1D}$. $A_1(a; 0; a)$; $B_1(a; a; a)$; $\overrightarrow{AB_1}\{0; a; a\}$. $\overrightarrow{A_1D}\{-a; 0; -a\}$;

$$\cos\varphi = \frac{|0+0-a^2|}{\sqrt{a^2+a^2}\cdot\sqrt{a^2+a^2}} = \frac{a^2}{a\sqrt{2}\cdot a\sqrt{2}} = 1\frac{1}{2};$$

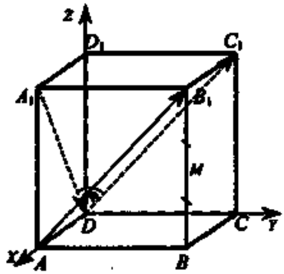


*Рис. 2*

$\varphi = 60°$. (*Ответ*: $60°$.)

**Карточка 3.**

*№ 1. Дано*: $A(-3; 1; 2)$, $B(1; -1; -2)$.

*Найти*: а) координаты середины отрезка $AB$; б) координаты и длину отрезка $AB$; в) координаты точки $C$: $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB}$.

*Решение:*

а) $x = \frac{x_1+x_2}{2}$; $y = \frac{y_1+y_2}{2}$; $z = \frac{z_1+z_2}{2}$; $M$ – середина $AB$; $M(-1; 0; 0)$.

б) $\overrightarrow{AB}\ (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$; $\overrightarrow{AB}\ (4; -2; -4)$; $|\overrightarrow{AB}| =$
$= \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$; $\overrightarrow{AB} = \sqrt{16+4+16} = \sqrt{36} = 6$.

в) $C(x; y; z)$; $A(-3; 1; 2)$, $B(1; -1; -2)$; $\overrightarrow{BC}\ (x - 1; y + 1; z + 2)$;
$\overrightarrow{AB}\ (4; -2; -4)$, так как $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB}$, то $x - 1 = 4$; $y + 1 = -2$; $z + 2 = -4$;
$x = 5$; $y = -3$; $z = -6$; $C(5; -3; -6)$.

(*Ответ*: а) $(-1; 0; 0)$; б) $\overrightarrow{AB}\ (4; -2; -4)$, $|\overrightarrow{AB}| = 6$; в) $\vec{c}\ (5; -3; -6)$.)

*№ 2. Дано*: $A(0; 4; 0)$, $B(2; 0; 0)$, $C(4; 0; 4)$, $D(2; 4; 4)$ (рис. 3).

*Доказать*, что $ABCD$ – ромб.

*Решение*:

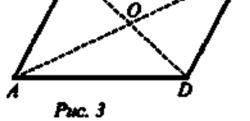


*Рис. 3*

1. Докажем, что $ABCD$ – параллелограмм. Для этого воспользуемся признаком параллелограмма. Пусть $O$ – середина $AC$, $O_1$ – середина $BD$. $O(2; 2; 2)$; $O_1(2; 2; 2)$; $O = O_1$, следовательно, $AC \cap BD = 0$ и $AO = OC$; $BO = OD$; $ABCD$ – параллелограмм.
2. Докажем, что $AB = AD$. $|AB| = \sqrt{(2-0)^2+(0-4)^2+(0-0)^2} =$
$= \sqrt{4+16} = \sqrt{20}$; $|AD| = \sqrt{(2-0)^2+(4-4)^2+(4-0)^2} =$
$= \sqrt{4+16} = \sqrt{20}$, следовательно, $AB = AD$, значит, $ABCD$ – ромб (по определению).

*№ 3. Дано*: $A(0; 1; 2)$, $B(\sqrt{2}; 1; 2)$, $C(\sqrt{2}; 2; 1)$, $D(0; 2; 1)$.

*Докажите*, что $ABCD$ – квадрат.

*Решение*: Воспользуемся чертежом задачи № 2.

1) *Найдем* координаты середин диагоналей четырехугольника $ABCD$.

$O'(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{3}{2};\frac{3}{2})$ – середина $AC$; $O(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{3}{2};\frac{3}{2})$ – середина $BD$;

$O' = O$, следовательно $ABCD$ – параллелограмм.

2) $AB=\sqrt{(\sqrt{2})^2+0+0}=\sqrt{2}$; $AD=\sqrt{0,1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$; $AB = AD \Rightarrow$

$\Rightarrow ABCD$ – ромб.

3) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=?$ $\overrightarrow{AB}(\sqrt{2};0;0)$; $\overrightarrow{AD}(0;1;-1)$; $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=0+0+0=$

$=0\Rightarrow\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AD}$, Следовательно $ABCD$ – квадрат.

**Карточка 4.**

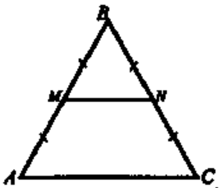



*Рис. 4*

***№ 1.*** *Дано*: $\Delta ABC$. $A(2;1;-8)$, $B(1;-5;0)$, $C(8;1;-4)$ (рис. 4).

а) *Докажите*, что $\Delta ABC$ – равнобедренный;

б) *Найти*: $MN$ – среднюю линию треугольника, соединяющую боковые стороны.

*Решение*:

1. $AB=\sqrt{(1-2)^2+(1+5)^2+(-8-0)^2}=\sqrt{1+36+64}=$

$=BC=\sqrt{(8-1)^2+(1+1)^2+(-4-0)^2}=\sqrt{49+36+16}$

$=\sqrt{101}$; $AB = BC \Rightarrow \Delta ABC$ – равнобедренный (по определению).

2. $MN$ – средняя линия $M(\frac{2+1}{2};\frac{1-5}{2};\frac{-8+0}{2})=M(1,5;-2;-4)$; $N(4,5;$

$-2;-2)$; $MN=\sqrt{(4,5-1,5)^2+(-2+2)^2+(-2+4)^2}=\sqrt{9+0+4}=\sqrt{13}$; или

$MN=\frac{1}{2}AC$; $AC=\sqrt{(8-2)^2+(1-1)^2+(-4+8)^2}=\sqrt{36+0+16}=\sqrt{52}$;

$MN=\frac{1}{2}\sqrt{52}=\frac{1}{2}\sqrt{13\cdot4}=\sqrt{13}.$

(*Ответ*: $\sqrt{13}$.)

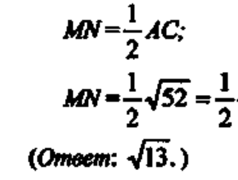



*Рис. 5*

***№ 2.*** *Дано*: $ABCD$ – параллелограмм $A(-6;-4;0)$, $B(6;-6;2)$, $C(10;0;4)$ (рис. 5).

*Найти*: $D(x;y;z)$ и угол между $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BD}$.

*Решение*:

1. Найти $D(x;y;z)$; $O$ – середина $AC$; $O(\frac{10-6}{2};\frac{-4+0}{2};\frac{0+4}{2})$; $O(2;-2;2)$; $O$ – середина $BD$ (по свойству диагоналей параллелограмма). $2=\frac{6+x}{2}$;

$6+x=4$; $x=-2$; $-2=\frac{-6+y}{2}$; $-6+y=-4$; $y=2$; $2=\frac{2+2}{2}$; $2+z=4$;

$z=2$; $D(-2;2;2)$.

2. $\cos\varphi = \dfrac{|\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}|}{|\overrightarrow{AC}|\cdot|\overrightarrow{BD}|}$; $\overrightarrow{AC}(16; 4; 4)$; $\overrightarrow{BD}(-8; 8; 0)$;

$$\cos\varphi = \frac{|16\cdot(-8)+4\cdot8+4\cdot0|}{\sqrt{16^2+4^2+4^2}\cdot\sqrt{(-8)^2+8^2+0}} = \frac{96}{12\sqrt{2}\cdot8\sqrt{2}} = \frac{1}{2};\ \varphi = 60°.$$

(*Ответ*: $D(-2; 2; 2)$; 60°.)

*№ 3. Дано*: $A(2; 5; 8)$, $B(6; 1; 0)$ (рис. 6).

*Найдите*: а) $C(x; y; z)$; $C \in Oy$; $AC = BC$; б) $S_{\Delta ABC}$.

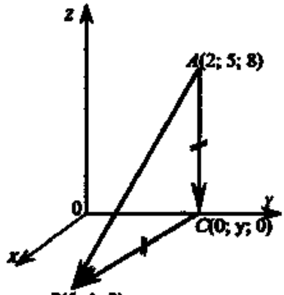



*Рис. 6*

*Решение*:

а) $C \in Oy$, следовательно, $C(0; y; 0)$; $AC = BC$, следовательно, $(0-2)^2 + (y-5)^2 + (0-8)^2 = (0-6)^2 + (y-1)^2 + 0^2$;
$4 + y^2 - 10y + 25 + 64 = 36 + y^2 - 2y + 1$;
$-8y = 37 - 64 - 29$; $-8y = -56$; $y = 7$;
$C(0; 7; 0)$.

б) $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\sin\angle A$. $\overrightarrow{AB}(4; -4; -8)$; $\overrightarrow{AC}(-2; 2; -8)$.

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{16+16+64} = \sqrt{96} = 4\sqrt{6}$; $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{4+4+64} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$;

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 4\cdot(-2) + (-4)\cdot2 + 64 = 48$. $\cos\angle A = \dfrac{48}{4\sqrt{6}\cdot6\sqrt{2}} = \dfrac{2}{\sqrt{12}} =$

$= \dfrac{2}{2\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$; $\sin\angle A = \sqrt{1-\dfrac{1}{3}} = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$; $S_\Delta = \dfrac{1}{2}4\sqrt{6}\cdot6\sqrt{2}\cdot\sqrt{\dfrac{2}{3}} =$

$= \dfrac{24\cdot\sqrt{12}\cdot\sqrt{2}}{2\cdot\sqrt{3}} = \dfrac{24\cdot2\sqrt{2}}{2}$; $S_\Delta = 24\sqrt{3}$.

(*Ответ*: а) $C(0; 7; 0)$, б) $S_\Delta = 24\sqrt{3}$.)

**Карточка 5.**

*№ 1. Дано*: $\vec{a}$, $\vec{b}$; а) $|\vec{a}| = 4$; $|\vec{b}| = 3$, $(\vec{a}\,\vec{b}) = 30°$; б) $\vec{a}(2; -3; 1)$; $\vec{b} = 3\vec{i} + 2\vec{k}$.

*Найти*: $\vec{a}\cdot\vec{b}$.

*Решение*:

а) $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot(\vec{a}\,\vec{b})$; $\vec{a}\cdot\vec{b} = 4\cdot3\cdot\cos30° = 12\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$;

б) $\vec{a}(2; -3; 1)$; $\vec{b}(3; 0; 2)$; $\vec{a}\cdot\vec{b} = x_1\cdot x_2 + y_1\cdot y_2 + z_1\cdot z_2$; $\vec{a}\cdot\vec{b} = 2\cdot3 - 3\cdot0 + 1\cdot2 = 6 + 2 = 8$.

(*Ответ*: а) $6\sqrt{3}$; б) 8.)

*№ 2. Дано*: $\vec{a}$, $\vec{b}$; $\vec{a}\{-2; 3; 6\}$, $\vec{b} = 6\vec{i} + 8\vec{k}$.

*Найти*: $\vec{b}\cdot(\vec{a} + \vec{b})$.

*Решение*: $\vec{b}$ (0; 6; –8); $\vec{b}\cdot(\vec{a}+\vec{b})=\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{b}^2$; $\vec{b}\cdot\vec{a}=-2\cdot 0+3\cdot 6+$ $+6\cdot(-8)=18-48=-30$; $\vec{b}^2=|\vec{b}|^2$; $|\vec{b}|^2=36+64=100$; $\vec{b}\cdot(\vec{a}+\vec{b})=$ $=-30+100=70$.

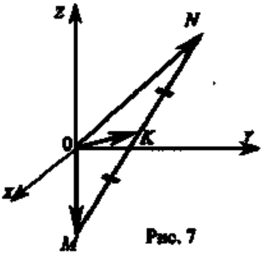


Рис. 7

**№ 3.** *Дано*: $\vec{a}$ {1; 2; –1}, $\vec{b}$ {–3; 1; 4}; $\vec{c}$ {3; 4; –2}, $\vec{d}$ {2; –1; 3}.

*Вычислить* $(\vec{a}+2\vec{b})\cdot(\vec{c}-\vec{d})$; $(\vec{a}+2\vec{b})\cdot$ $\cdot(\vec{c}-\vec{d})=?$ $\vec{a}+2\vec{b}=(1-6; 2+2; -1+8)$; $\vec{a}+2\vec{b}=$ $=\{-5; 4; 7\}$; $\vec{c}-\vec{d}=\{3-2; 4+1; -2-3\}=$ $=\{1; 5; -5\}$; $(\vec{a}+2\vec{b})\cdot(\vec{c}-\vec{d})=-5\cdot 1+4\cdot 5+7\cdot$ $\cdot(-5)=-5+20-35=-20$. (*Ответ*: –20.)

**Карточка 6.**

*№ 1. Дано*: *M* (–4; 7; 0), *N* (0; –1; 2); *K* – середина *MN* (рис. 8).
*Найдите*: *OK*, где *O* – начало координат.

*Решение*: В $\Delta OMN$ *OK* – медиана; $\overline{OK}=\frac{1}{2}(\overline{ON}+\overline{OM})$; $\overline{OK}=\frac{1}{2}(-4+0;$ $7-1;\ 0+2)=\frac{1}{2}\{-4; 6; 2\}=(-2; 3; 1)$; $\overline{OK}=\sqrt{4+9+1}=\sqrt{14}$. (*Ответ*: $\sqrt{14}$.)

**№ 2.** *Дано*: *MABC* – тетраэдр; *M* (2; 5; 7), *A* (1; –3; 2), *B* (2; 3; 7), *C* (3; 6; 0); *O* – точка пересечения медиан $\Delta ABC$ (рис. 8).

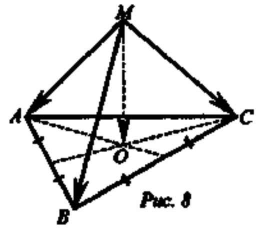


Рис. 8

*Найти*: *MO*.

*Решение*: $\overrightarrow{MO}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC})$; $\overrightarrow{MA}$ (–1; –8; –5); $\overrightarrow{MB}$ (0; –2; 0); $\overrightarrow{MC}$(1; 1; –7); $\overrightarrow{MO}=\frac{1}{3}(-1+0-1;$ $-8-2+1; -5+0-7)=\frac{1}{3}(0; -9; -12)=(0; -3; -4)$;

$|\overrightarrow{MO}|=\sqrt{0+9+16}=5$. (*Ответ*: 5.)

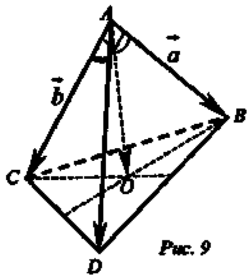


Рис. 9

**№ 3.** *Дано*: *DABC* – тетраэдр; *DA* = 5 см; *AB* = 4 см; *AC* = 3 см; $\angle BAC=90°$; $\angle DAB=60°$; $\angle DAC=45°$; *O* – точка пересечения медиан $\Delta DBC$ (рис. 9).

*Найти*: *AO*.

*Решение*:

1. $\overrightarrow{AO}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB})$;

2. Введем векторы $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$; $\vec{b}=\overrightarrow{AC}$; $\vec{c}=\overrightarrow{AD}$; тогда $\overrightarrow{AO}=\frac{1}{3}(\vec{a}++\vec{b}+\vec{c})$;

$$|\overrightarrow{AO}|^2=\frac{1}{9}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})^2=\frac{1}{9}(\vec{a}^2+\vec{b}^2+\vec{c}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+2\vec{a}\cdot\vec{c}+2\vec{b}\cdot\vec{c});$$

3. Используем данные задачи на вычисления $|\overrightarrow{AO}|^2$: $\vec{a}^{\,2} = 16$; $\vec{b}^{\,2} = 9$; $\vec{c}^{\,2} = 25$; $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos 90^\circ = 0$; $\vec{a} \cdot \vec{c} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos 60^\circ = 4 \cdot 5 \frac{1}{2} = 10$; $\vec{b} \cdot \vec{c} = |\vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cdot \cos 45^\circ = 3 \cdot 5 \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{15\sqrt{2}}{2}$;

4. Подставляем в выражение $|\overrightarrow{AO}|^2 = \frac{1}{9}(16+9+25+0+20+15\sqrt{2})$;

$|\overrightarrow{AO}|^2 = \frac{1}{9}(70 + 15\sqrt{2})$; $|\overrightarrow{AO}| = \frac{1}{3}\sqrt{70 + 15\sqrt{2}}$.

(*Ответ*: $\frac{1}{3}\sqrt{70 + 15\sqrt{2}}$.)

# Глава VI
# ЦИЛИНДР, КОНУС И ШАР

## §1 Цилиндр
## (уроки 16–18)

### Урок 16. Понятие цилиндра

*Цели урока:*

– ввести понятия цилиндрической поверхности, цилиндра и его элементов (боковая поверхность, основания, образующие, ось, высота, радиус);
– вывести формулы для вычисления площадей боковой и полной поверхностей цилиндра; рассмотреть типовые задачи по изучаемой теме.

*Используемый материал:* модели цилиндров, фигур, имеющих цилиндрическую поверхность; плакат с изображением цилиндра, его сечений и развертки.

### Ход урока

**I. Организационный момент**

Объявление темы и цели урока.

**II. Актуализация знаний и введение нового материала в форме фронтальной работы с классом по плану**

1. Понятие цилиндрической поверхности, цилиндра.
   а) Рассмотреть различные предметы окружающей обстановки, дающие представление о цилиндре – карандаш, стакан, кастрюля, кусок трубы и т.д. (Представленные цилиндры должны иметь разные соотношения между высотой и диаметром).
   б) Дать определения цилиндрической поверхности, цилиндра и его изображение на плоскости. На чертеже показать ось цилиндра, высоту, радиус, образующие, основания цилиндра. В ходе этой работы использовать плакат, аналогичный рисункам 135 и 136 учебника.
   в) Рассмотреть варианты получения цилиндра:
      1) путем вращения прямоугольника вокруг прямой, содержащей одну из сторон прямоугольника.

2) по определению цилиндрической поверхности.

2. Ввести понятие осевого сечения цилиндра, установить его свойства:
   а) осевое сечение цилиндра – прямоугольник;
   б) любые два осевых сечения цилиндра равны между собой.

Предложить учащимся самим устно доказать эти свойства.

3. Рассмотреть неосевые сечения цилиндра:
   а) сечения, перпендикулярные оси цилиндра, представляют собой равные круги (см. рис. 138 в учебнике),
   б) сечения, параллельные оси цилиндра – прямоугольники,
   в) сечения иного рода (см. рис. 139 в учебнике).
4. Ввести понятие равностороннего цилиндра, осевым сечением которого является квадрат.
5. Рассмотреть сечения равностороннего цилиндра плоскостью:
   а) параллельной оси цилиндра;
   б) перпендикулярной оси цилиндра.
6. Ввести понятие касательной плоскости цилиндра как плоскости, проходящей через образующие цилиндра и перпендикулярную осевому сечению, проведенному через эту образующую (аналогия с касательной к окружности).
7. Предложить ребятам ответить на вопрос: что собой представляет развертка цилиндра? Выслушав ответы, рассмотреть готовый чертеж развертки цилиндра (см. рис. 140).
8. Вместе с учащимися вывести формулы боковой поверхности цилиндра, полной поверхности. Формулы выводятся на основе определения, по которому за площадь боковой поверхности цилиндра принимается площадь ее развертки. Тот факт, что боковую поверхность цилиндра можно развернуть на плоскость и при этом получится прямоугольник, принимается на основе наглядных представлений.

$S_{бок.} = 2\pi R\text{h}$, $S_{полн.} = 2\pi R^2 + 2\pi R\text{h}$, $S_{полн.} = 2\pi R(R + \text{h})$, где

$R$ – радиус основания цилиндра;

h – высота цилиндра.

## III. Закрепление нового материала

1. Решение задачи по готовому чертежу (устно).

По данному чертежу также потренироваться в названии элементов цилиндра (рис. 1).

*Решение*:

1. $\Delta ABC$ – прямоугольный.
2. Так как $\angle BAC = 45°$, то $\Delta ABC$ – равнобедренный, значит, $AC = BC = 5$.
3. Так как $AC = 5$, $AC$ – диаметр, то $R = 2{,}5$.
4. $S_{полн.} = 2\pi R(H + R)$, где $H = 5$, $S_{полн.} = 2\pi \cdot 2{,}5$ $(5 + 2{,}5) = 5\pi \cdot 7{,}5 = 37{,}5\pi$.

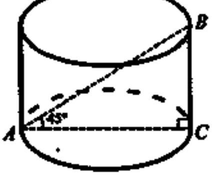


*Рис. 1*

*Ответ:* $37{,}5\pi$.

2. Решение задач

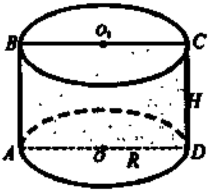



*Рис. 2*

***№ 525*** учебника (рис. 2).

$S_{сеч.} = 10$ м$^2$, $S_{осн.} = 5$ м$^2$. По условию:

$$\begin{cases} \pi R^2 = 5, & R\cdot H = 5, \\ 2R\cdot H = 10; & R = \dfrac{5}{H}. \end{cases} \quad \pi R^2 = 5,\ \pi\cdot\left(\frac{5}{H}\right)^2 = 5,$$

$\pi\cdot 25 = 5H^2$, $H^2 = 5\pi$, $H = \sqrt{5\pi}$ см. (*Ответ*: $\sqrt{5\pi}$ см.)

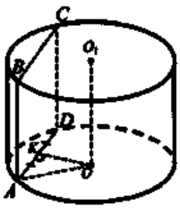



*Рис. 3*

***№ 529*** учебника (рис. 3).

***Решение:***

1. $ABCD$ – прямоугольник.
2. $S_{ABCD} = AB\cdot AD$, $H = AB = 8$ см.
3. Так как $OK$ – расстояние от $O$ до $AD$, то

   $OK \perp AD$, $\quad AK = KD$. $\quad AK = \sqrt{AO^2 - KO^2} =$

   $= \sqrt{25-9} = \sqrt{16} = 4$ (см).
4. $AD = 8$ см. 5. $S_{ABCD} = 8\cdot 8 = 64$ (см$^2$).

(*Ответ*: 64 см$^2$.)

3. Класс решает задачу № 523 самостоятельно, один ученик решает эту задачу на обратной стороне крыла доски. После окончания решения классу показывается решение ученика (заранее проверенное учителем) для проверки решений в тетрадях (рис. 4).

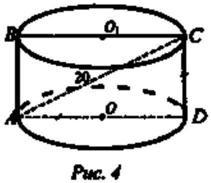



*Рис. 4*

***Решение:***

1. $ABCD$ – квадрат по условию.
2. $H = CD$, $CD = AD$.
3. $2CD^2 = AC^2$ (по теореме Пифагора), $CD =$

   $= \dfrac{20}{\sqrt{2}} = 10\sqrt{2}$ (см).

4. $R = \dfrac{1}{2}AD = 5\sqrt{2}$ (см). 5. $S_{осн.} = \pi R^2$, $S_{осн.} = \pi\cdot(5\sqrt{2})^2 = 50\pi$ (см$^2$).

(*Ответ*: $10\sqrt{2}$ см, $50\pi$ см$^2$.)

***Дополнительная задача***

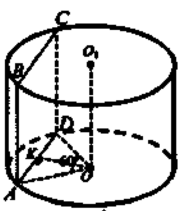



*Рис. 5*

В цилиндре параллельно оси проведена плоскость, отсекающая от окружности основания дугу в 60°. Высота цилиндра 10 см, расстояние от оси цилиндра до секущей плоскости 2 см. Найти площадь сечения (рис. 5).

***Решение:***

1. $ABCD$ – прямоугольник, $S_{ABCD} = AB\cdot AD$.
2. $H = AB = 10$ см.

3. $\cup AD = 60°$, значит, $\angle AOD = 60°$ (как центральный), $\angle AOK = 30°$ ($\Delta AOD$ – равнобедренный, $OK$ – высота, медиана и биссектриса).

4. $AK = KO \cdot \text{tg}30°, AK = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}$ см.

5. $AD = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ см. 6. $S = 10 \cdot \frac{4\sqrt{3}}{3} = \frac{40\sqrt{3}}{3}$ (см$^2$).

(*Ответ*: $\frac{40\sqrt{3}}{3}$ см$^2$.)

**IV. Подведение итогов**

– Итак, ребята, на этом уроке вы познакомились с понятиями цилиндрической поверхности, цилиндра и его элементами. Вывели формулы для вычисления площадей боковой и полной поверхностей цилиндра и научились применять эти формулы при решении задач.

---

**Домашнее задание**

П. 53, 54, № 522, 524, 526.

## Урок 17. Цилиндр. Решение задач

*Цели урока:*

– формировать навыки решения задач на нахождение элементов цилиндра, площади поверхности цилиндра;
– закрепить знания, умения учащихся по изучаемой теме;
– развивать самостоятельность учащихся в работе над задачами.

*Используемый дополнительный материал*: задачи на готовых чертежах.

### Ход урока

**I. Организационный момент**

Объявление темы и цели урока.

**II. Актуализация знаний учащихся**

Устная работа с классом.

1. Укажите среди окружающих вас предметов объекты, имеющие цилиндрическую форму.
2. Дайте определение цилиндра и его основных элементов.
3. Что такое осевое сечение цилиндра? Каков его вид?
4. Может ли осевое сечение быть: а) прямоугольником; б) квадратом; в) трапецией? Почему?
5. Цилиндр катится по плоскости. Какая фигура получается при движении его оси?

Проверка домашнего задания (три ученика работали у доски во время устной работы класса).

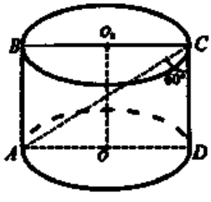


Рис. 1

**№ 522** (рис. 1).

*Решение:*

1. $ABCD$ – прямоугольник.
2. $\Delta ACD$ – прямоугольный.
3. $2R = AD = AC \cdot \sin 60° = \frac{48 \cdot \sqrt{3}}{2} = 24\sqrt{3}$ (см);

$R = 12\sqrt{3}$ см.

4. $H = CD = AC \cdot \cos 60° = 48 \cdot \frac{1}{2} = 24$ (см).
5. $S_{осн.} = \pi R^2$; $S_{осн.} = \pi(12\sqrt{3})^2 = 144 \cdot 3\pi = = 432\pi$ (см$^2$).

(*Ответ*: $H = 24$ см, $R = 12\sqrt{3}$ см, $S_{осн.} = 432\pi$ см$^2$.)

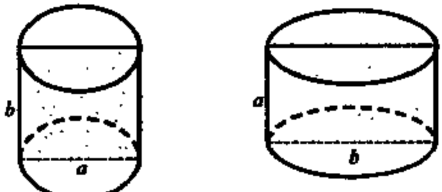


Рис. 2

**№ 524** (рис. 2).

*Решение:* Осевые сечения равны, значит, при наложении они совпадут. Но высоты цилиндров не равны: $a \neq b$.

(*Ответ*: нет.)

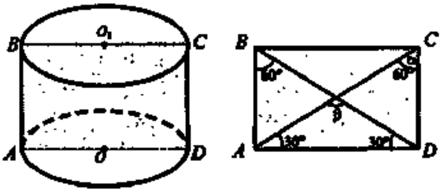


Рис. 3

**№ 526** (рис. 3).

*Решение:*

1. $S_{осн.} = \pi R^2$, $S_{сеч.} = H \cdot 2R$.
2. $\frac{S_{осн.}}{S_{сеч.}} = \frac{\sqrt{3}\pi}{4}$;

$\frac{\sqrt{3}\pi}{4} = \frac{\pi R^2}{H \cdot 2R}$; $\frac{R}{H} = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

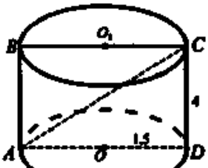
3. $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2R}{H}$; $\frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{3}$, $\alpha = 60$.
4. $\angle CAD = 30°$, $\angle BDA = 30°$, $\angle ATD = 120°$, $\angle ATB = 60°$.

(*Ответ*: а) 30°; б) 60°.)

***Решение задач по готовым чертежам.***

***I уровень*** – устно с обсуждением решения: № 1, 2, 3.

***II уровень*** – самостоятельное решение с самопроверкой по готовым ответам: № 4, 5, 6.



$AC$ – ?

Рис. 4

***Задача № 1*** (рис. 4).

*Решение:*

1. $OD = R$, $AD = 3$.
2. $\Delta ADC$ – прямоугольный. Так как $AD = 4$, то $AC = 5$ (пифагорова тройка).

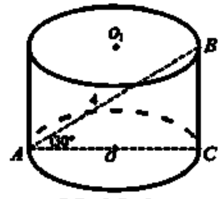
(*Ответ*: 5.)

***Задача № 2*** (рис. 5).

***Решение***:

1. $\Delta ABC$ – прямоугольный.
2. Так как $\angle BAC = 30°$, то $BC = \frac{1}{2}AB$, т.е. $BC = 2$.
3. $\cos 30° = \frac{AC}{AB}$, $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AC}{4}$, $AC = 2\sqrt{3}$.
4. $R = \frac{1}{2}AC$, $R = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$.

(*Ответ*: 2; $\sqrt{3}$.)




$BC$ – ? $R$ – ?

*Рис. 5*

***Задача № 3*** (рис. 6).

*Дано:* $O_1A = 5$, $AA_1 = 15$, $AB = 17$.

*Найти:* расстояние между $OO_1$ и $AB$.

***Решение***:

1. $\Delta AA_1B$ – прямоугольный; по теореме Пифагора $AB^2 = AA_1^2 + A_1B^2$, $17^2 = 15^2 + BA_1^2$, $BA_1^2 = 17^2 - 15^2 = (17 - 15)(17 + 15) = 2 \cdot 32 = 64$, $A_1B = 8$. ДП: $OK$, $K$ – середина $BA_1$.
2. $OK \perp A_1B$ (так как $OK$ – расстояние между $OO_1$ и $AB$:
$$\left.\begin{matrix} OK \perp OO_1 \Rightarrow OK \perp AA_1, \\ OK \perp A_1B \end{matrix}\right\} \Rightarrow OK \perp \text{пл. } AA_1B \Rightarrow OK \perp AB.$$
3. По теореме Пифагора из $\Delta A_1KO$: $OA_1^2 = OK^2 + A_1K^2$, $OK = 25 - 16$, $OK^2 = 9$, $OK = 3$.

(*Ответ*: 3.)

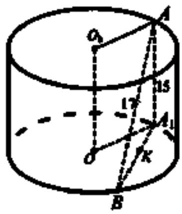



*Рис. 6*

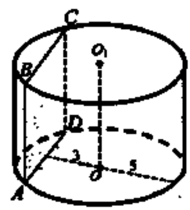
***Задача № 4*** (рис. 7).

*Найти:* $S_{ABCD}$.

***Решение:***

1. $AO = 5$ – дополнительное построение.
2. $AD = 2 \cdot (\sqrt{25 - 9}) = 2 \cdot \sqrt{16} = 2 \cdot 4 = 8$.
3. $ABCD$ – прямоугольник.
4. $S_{ABCD} = AB \cdot AD$, $S_{ABCD} = 10 \cdot 8 = 80$.

(*Ответ*: 80.)




$ABCD \| OO_1$

*Рис. 7*

***Задача № 5.***

*Дано:* $\frac{S_{\text{бок.}}}{S_{\text{осн.}}} = \frac{1}{2}$.

*Найти:* $\frac{H}{2R}$.

***Решение:***

1. $\frac{S_{\text{бок.}}}{S_{\text{осн.}}} = \frac{2\pi RH}{\pi R^2} = \frac{2H}{R} = \frac{1}{2}$.

2. $\dfrac{2H}{R}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\dfrac{H}{2R}=\dfrac{1}{8}$.

(*Ответ*: $\dfrac{1}{8}$.)

***Задача № 6*** (рис. 8).

*Дано:* $ABCD$ – осевое сечение.

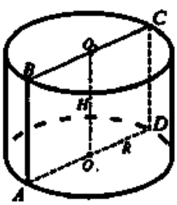


*Рис. 8*

*Найти:* $\dfrac{S_{бок.}}{S_{ABCD}}$.

***Решение:***

1. $S_{бок.}=2\pi RH$, $ABCD$ – прямоугольник.
2. $S_{ABCD}=AD\cdot AB$, $S_{ABCD}=2R\cdot H$.
3. $\dfrac{S_{бок.}}{S_{ABCD}}=\dfrac{2\pi RH}{2RH}=\pi$.

(*Ответ*: π.)

**III. Решение задач**

***№ 530*** (рис. 9).

***Решение:***

1. $ABCD$ – квадрат.

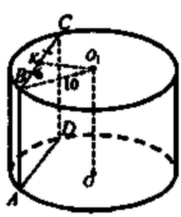


*Рис. 9*

2. Так как $O_1K$ – расстояние от точки $O$ до $ABCD$, то $O_1K\perp ABCD$, $O_1K\perp BC$.
3. $AB=BC=12$ см $\Rightarrow BK=6$ см.
4. $BO_1=10$ см.
5. $\Delta BKO_1$ – прямоугольный, по теореме Пифагора. $BO_1^2=BK^2+KO_1^2$. $KO_1^2=BO_1^2-BK^2$,
   $KO_1=\sqrt{100-36}=\sqrt{64}=8$ см.

(*Ответ*: 8 см.)

***№ 533*** (рис. 10).

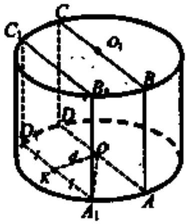


*Рис. 10*

***Решение:***

1. $S_{ABCD}=S$.
2. $S_{A_1B_1C_1D_1}=A_1B_1\cdot A_1D_1$, $A_1B_1=AB=h$,
   $OA=R=\dfrac{S}{2h}$.
3. $\Delta OKA_1$ – прямоугольный, $\angle K=90°$. $OA_1=R$.
4. $A_1K=\sqrt{R^2-d^2}$; $2A_1K=\sqrt{R^2-d^2}=A_1D_1$.
5. $S_{A_1B_1C_1D_1}=2h\sqrt{R^2-d^2}=2h\sqrt{\dfrac{S^2}{4h^2}-d^2}=2h\cdot\dfrac{\sqrt{S^2-4h^2d^2}}{2h}=$
   $=\sqrt{S^2-4h^2d^2}$.

(*Ответ*: $\sqrt{S^2-4h^2d^2}$.)

**№ 537** (рис. 11).

*Решение*:

1. $S_{бок.} = 2\pi RH$.
2. $d = AD = 1$ (м).
3. $H = CD = 2\pi R$, $R = \dfrac{1}{2}$ (м), $H = 2 \cdot \pi \cdot \dfrac{1}{2} = \pi$ (м).
4. $S_{бок.} = 2\pi \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \pi = \pi^2$ (м$^2$).

(*Ответ*: $\pi^2$ м$^2$.)

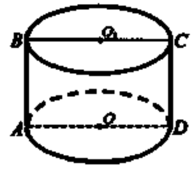


*Рис. 11*

## IV. Подведение итогов

– На этом уроке мы отрабатывали навыки решения задач на нахождение элементов цилиндра и совершенствовали полученные знания при решении задач.

---

## Домашнее задание

П. 53, 54. I уровень – № 527, 531. II уровень – № 531, 544, 601.

***Решение задач из домашнего задания.***

**№ 527 а)** (рис. 12).

*Решение:*

1. Достроим плоскость, содержащую $AB$ так, чтобы $A_1BB_1A \parallel OO_1$.
2. $AA_1BB_1$ – прямоугольник.
3. $O_1K \perp A_1B$, $O_1K$ – расстояние от $OO_1$ до $AA_1BB_1$, так как $O_1K \perp AA_1BB_1$, $K$ – середина $A_1B$.
4. $r = 10$ дм, $d = O_1K = 8$ дм, $AB = 13$ дм.
5. $A_1K = \sqrt{r^2 - d^2}$, $A_1B = 2\sqrt{r^2 - d^2}$, $A_1B = 2\sqrt{100 - 64} = 2 \cdot \sqrt{36} = 12$ (дм).
6. $AA_1 = \sqrt{169 - 144} = \sqrt{25} = 5$ (дм) (так как $\Delta AA_1B$ – прямоугольный).

(*Ответ*: 5 дм.)

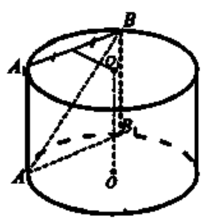


*Рис. 12*

**№ 531** (рис. 13).

*Решение*:

1. $ABCD \parallel OO_1$.
2. $O_1K$ – расстояние от $OO_1$ до $ABCD$. $O_1K = 9$ дм., $K$ – середина $BC$.
3. $S_{ABCD} = 240$ дм$^2$.
4. $240 = 10 \cdot BC$, $BC = 24$ дм, $BK = 12$ дм.
5. $\Delta BKO_1$ – прямоугольный, $BO_1 = \sqrt{12^2 + 9^2} = \sqrt{144 + 81} = \sqrt{225} = 15$(дм).

(*Ответ*: 15 дм.)

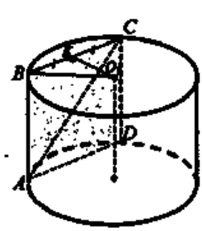


*Рис. 13*

***№ 544*** **(рис. 14).**

***Решение:***

1. $S_{осн.} = \pi R^2$.

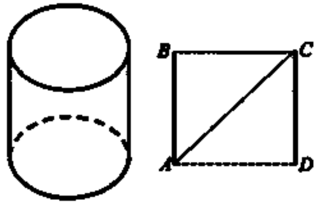



*Рис. 14*

2. $S_{кв.} = S_{бок.цил.}$ $S_{кв} = AD^2$.
3. $AD = \frac{d}{\sqrt{2}}$, $\frac{d}{\sqrt{2}} = 2\pi R$, $R = \frac{d}{2\sqrt{2}\pi}$.
4. $S_{осн.} = \pi \cdot \frac{d^2}{8\pi^2} = \frac{d^2}{8\pi}$.

(*Ответ*: $\frac{d^2}{8\pi}$.)

***№ 601*** **(рис. 15).**

***Решение:***

1) $ABCD$ – осевое сечение; $OA = R$, $P$ – середина $OA$; $MLKN \perp OA$;

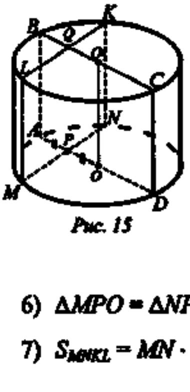



*Рис. 15*

2) $ABCD$ и $MLKN$ – прямоугольники;
3) $LM = H$; $S = S_{ABCD} = AD \cdot AB$; $S = 2RH$.
4) $OP = AP = \frac{R}{2}$.
5) $\Delta MPO$ – прямоугольный $PM = \sqrt{R^2 - (\frac{R}{2})^2} = \frac{R\sqrt{3}}{2}$;
6) $\Delta MPO = \Delta NPO \Rightarrow NP = MP, NM = R\sqrt{3}$;
7) $S_{MNKL} = MN \cdot ML$; $S_{MNKL} = R\sqrt{3} \cdot H$;
8) $S = 2RH, RH = \frac{3}{2}$; $S_{MNKL} = \sqrt{3} \cdot \frac{S}{2} = \frac{S\sqrt{3}}{2}$.

(*Ответ*: $\frac{S\sqrt{3}}{2}$.)

## Урок 18. Цилиндр. Решение задач

*Цель урока:*

– совершенствовать навыки решения задач по теме.

### Ход урока

**I. Организационный момент**

Сообщение темы и цели урока.

**II. Актуализация знаний учащихся**

1. Проверить домашнее задание? выписать на доске ответы и указания к задачам из домашней работы, предложить учащимся найти свои

ошибки и устранить их. Учитель оказывает индивидуальную помощь при необходимости.

2. Разобрать задачу, с которой не справилось большинство учащихся.

**III. Повторение изученных на предыдущих уроках формул в ходе решения задач**

***№ 541*** (рис. 1).

***Решение:***

1. $S_{бок.} = 2\pi Rl = \pi dl$, $d = 20$ см $= 0{,}2$ м.

2. $S_{шв.} = \dfrac{2{,}5\pi dl}{100}$,

3. $S_{бок.} + S_{шв.} = \pi dl(1 + \dfrac{2{,}5}{100}) = 1{,}025\pi dl$.

4. $S_{бок.} + S_{шв.} = 1{,}025\pi \cdot 0{,}2 \cdot 4 = 0{,}82\pi$ (м$^2$).

(*Ответ*: $0{,}82\pi$ м$^2$.)

*Рис. 1*

***№ 545*** (рис. 2).

***Решение:*** $ABO_1O$ – квадрат со стороной $a$.

а) сечение – прямоугольник $ABCD$; $S_{ABCD} = AB \cdot AD$, $AB = a$, $AD = 2a$, $S_{ABCD} = 2a^2$.

б) $S_{бок.} = 2\pi RH$, $S_{бок.} = 2\pi a^2$.

в) $S_{полн.} = 2\pi R(R + H)$, $S_{полн.} = 2\pi a \cdot 2a = 4a^2\pi$.

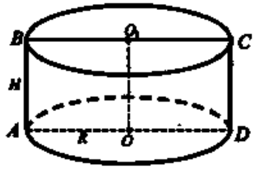


*Рис. 2*

***Дополнительная задача***

***№ 540*** (рис. 3).

Высота цилиндра на 12 см больше его радиуса, а площадь полной поверхности равна $288\pi$ см$^2$. Найдите радиус основания и высоту цилиндра.

1) $H - R = 12$ см;

2) $S_{полн.} = 2\pi R(R + H)$, $S_{полн.} = 288\pi$ см$^2$;

$$\begin{cases} H - R = 12; \\ 2\pi R(R+H) = 288\pi; \end{cases} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$2R(R + H) = 288$; $R^2 + RH = 144$,

$H = 12 + R$;

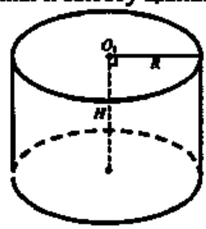


*Рис. 3*

3) $R^2 + R \cdot (12 + R) = 144$; $2R^2 + 12R = 144$; $R^2 + 6R - 72 = 0$; $D = 36 - 4 \cdot (-72) = 36 + 288 = 324$; $R_1 = \dfrac{-6-18}{2} = \dfrac{-24}{2} = -12$ не удовлетворяет условию $R > 0$; $R_2 = \dfrac{-6+18}{2} = \dfrac{12}{2} = 6$.

4) $R = 6$ см; $H = 12 + 6 = 18$ (см).

(*Ответ*: 6 см; 18 см.)

**IV. Самостоятельная работа** (см. приложение).

## *Решение задач самостоятельной работы*

### *I уровень*

***Вариант I***

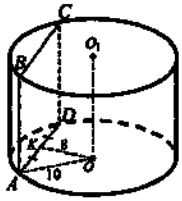



*Рис. 4*

***1. (рис. 4).***

1) $ABCD$ – квадрат.

2) $AO = 10$ см, $OK = 8$ см. $OK \perp AD$, $AK = KD$.

3) $\Delta AKO$ прямоугольный. $AK = \sqrt{100-64} = \sqrt{36}$ $= 6$ (см).

4) $AD = 6 \cdot 2 = 12$ (см).

5) $S_{ABCD} = 12^2 = 144$ (см$^2$).

(*Ответ*: 144 см$^2$.)

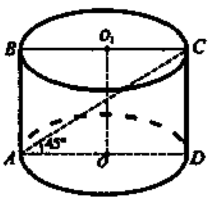



*Рис. 5*

***2. (рис. 5).***

1) $ABCD$ – осевое сечение.

2) $AC = 8\sqrt{2}$ дм, $\Delta ACD$ – прямоугольный, $AD =$ $= DC$, $2AD^2 = AC^2$, $AD = 8$ (дм).

3) $AD = CD = H = 8$ (дм).

4) $S_{полн.} = 2\pi R(\mathrm{H} + R)$, $S_{полн.} = 2\pi \cdot 4(8 + 4) =$ $96\pi$ (дм$^2$).

(*Ответ*: $96\pi$ дм$^2$.)

***Вариант II***

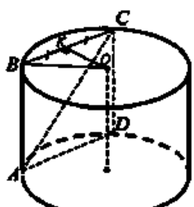



*Рис. 6*

***1. (рис. 6).***

1) $ABCD$ – квадрат.

2) $OO_1 = AB = 16$ см, $KO_1 = 6$ см, так как $KO_1$ расстояние от $OO_1$ до $ABCD$, $K$ – середина $BC$.

3) $BC = 16$ см $\Rightarrow BK = 8$ см.

4. $\Delta BKO_1$ – прямоугольный. $BO_1 = R$, $BO_1 =$ $= \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{100} = 10$ (см).

(*Ответ*: 10 см.)

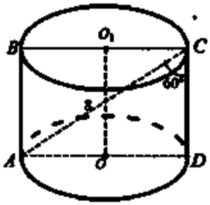



*Рис. 7*

***2. (рис. 7).***

1) $\Delta ACD$ – прямоугольный, $\angle ACD = 60° \Rightarrow$ $\Rightarrow \angle CAD = 30°$.

2) Так как $\angle CAD = 30°$, то $CD = \dfrac{1}{2}AC$, $CD =$ $= 4$ см $= H$.

3) $AD = \sqrt{64-16} = 4\sqrt{3}$ (дм), $R = 2\sqrt{3}$ дм.

4) $S_{полн.} = 2\pi R(R + H)$, $S_{полн.} = 2\pi \cdot 2\sqrt{3}(2\sqrt{3} + 4) =$ $= 4\pi\sqrt{3}(2\sqrt{3} + 4)$ (дм$^2$).

(*Ответ*: $4\pi\sqrt{3}(2\sqrt{3} + 4)$ дм$^2$.)

## II уровень

### Вариант I

*1. (рис. 8).*

1) $ABCD$ – прямоугольник, $CD = 5$ см.
2) $S_{бок.} = 100\pi$ см$^2$, $S_{бок.} = 2\pi R \cdot h$, $100\pi = 2\pi R \cdot 5$, $R = 10$ см, $AD = 10$ см.
3) $S_{ABCD} = AB \cdot AD$, $S_{ABCD} = 5 \cdot 10 = 50$ см$^2$.

(*Ответ*: 50 см$^2$.)

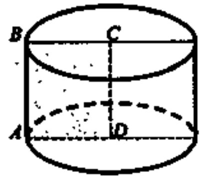


*Рис. 8*

*2. (рис. 9).*

1) $\cup AB = 120° \Rightarrow \angle AOB = 120°$ (центральный).
2) $\Delta KOO_1$ – равнобедренный, так как $\angle O_1KO = 45° \Rightarrow KO = OO_1 = 4$ см.
3) $\Delta AOB$ – равнобедренный, так как $AO = OB = R$, $OK \perp AB$ (по свойству медианы).
4) $\angle OAB = 30° \Rightarrow AO = 2OK$; $AO = 8$ см, $R = 8$ см.
5) $S_{сеч.} = 2R \cdot OO_1$, $S_{сеч.} = 16 \cdot 4 = 64$ (см$^2$).

(*Ответ*: 64 см$^2$.)

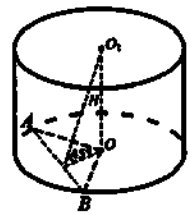


*Рис. 9*

### Вариант II

*1.*

1) $S_{бок.} = 60\pi$ см$^2$, $S_{бок.} = 2\pi RH$, $60\pi = 2\pi RH$, $30 = RH$.
2) По условию $R = 5$ см $\Rightarrow H = \dfrac{30}{5} = 6$ (см).
3) $S = 5 \cdot 6 = 30$ (см$^2$).

(*Ответ*: 30 см$^2$.)

*2. (рис. 10).*

1. $S_{осн.сеч.} = S_{ANMC} = OO_1 \cdot 2AO$.
2. Так как $\angle AO_1O = 45° \Rightarrow \Delta AOO_1$ – равнобедренный, прямоугольный, значит, $AO = OO_1$.
3. $AO = OK : \cos 30° = 2\sqrt{3} : \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 4$ (см).

   ($OK \perp AB$, $BK = KA$).
4. $OO_1 = 4$ см, $NA = 2OA = 2 \cdot 4 = 8$ (см). $S_{сеч.} = 4 \cdot 8 = 32$ (см$^2$).

(*Ответ*: 32 см$^2$.)

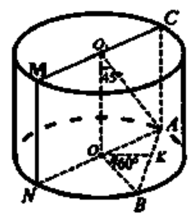


*Рис. 10*

## III уровень

### Вариант I

*1. (рис. 11).*

1) $\Delta ABO$ – равнобедренный, так как $AO = OB = R \Rightarrow \angle AOK = \angle BOK = \dfrac{\alpha}{2}$. $OK \perp AB$, $AK = KB$.
2) $\Delta AOK$ – прямоугольный, $\cos\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{d}{AO}$, $AO = \dfrac{d}{\cos\dfrac{\alpha}{2}}$.

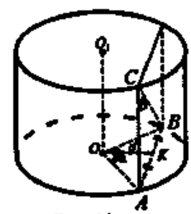


*Рис. 11*

3) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{AK}{d}$, $AK=d\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

4) $AB=2d\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$,

5) $\operatorname{tg}\beta=\frac{2d\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{AC}$ (из $\Delta ABC$).

6) $AC=\frac{2d\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{tg}\beta}$.

7) $S_{\text{сеч.}}=AC\cdot AB$, $S_{\text{сеч.}}=\frac{2d\operatorname{tg}\alpha/2}{\operatorname{tg}\beta}\cdot 2d\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{4d^2\operatorname{tg}^2\alpha/2}{\operatorname{tg}\beta}$.

***2. (рис. 12).***

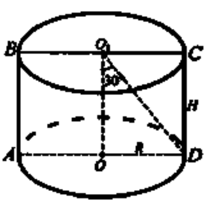



*Рис. 12*

1. $S_{ABCD}=18\sqrt{3}$ см². $S_{ABCD}=2RH$.
2. $\operatorname{tg}30°=\frac{R}{H}$, $\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{R}{H}$, $H=\sqrt{3}R$,
3. $2R\cdot\sqrt{3}R=18\sqrt{3}$, $R^2=\frac{18\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=9$, $R=3$ см.
4. $H=3\sqrt{3}$ см.
5. $S_{\text{бок.}}=2\pi RH$.
6. $S_{\text{бок.}}=2\pi\cdot 3\cdot 3\sqrt{3}=18\pi\sqrt{3}$ (см²).

(*Ответ*: $18\pi\sqrt{3}$ см².)

### *III уровень*

***Вариант II***

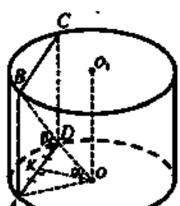



*Рис. 13*

***1. (рис. 13).***

1) $S_{\text{полн.}}=2\pi R(R+H)$, $R=AO$, $H=AB$.
2) $AB=BD\sin\beta$, $AB=l\cdot\sin\beta$.
3) $AD=l\cdot\cos\beta$.
4) $AK=\frac{l}{2}\cos\beta$;
5) $AO=\frac{AK}{\sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{l\cos\beta}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$. $S_{\text{полн.}}=\frac{2\pi l\cos\beta}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\cdot(l\sin\beta+$

$+\frac{l\cos\beta}{2\sin\frac{\alpha}{2}})=\frac{\pi l^2\cos\beta}{\sin\frac{\alpha}{2}}(\sin\beta+\frac{\cos\beta}{2\sin\frac{\alpha}{2}})$.

(*Ответ*: $\frac{\pi l^2\cos\beta}{\sin\alpha/2}\left(\sin\beta+\frac{\cos\beta}{2\sin\alpha/2}\right)$.)

*2. (рис. 14).*

1) $P_{ABCD} = 36$ см,

2) $S = 2\pi R \cdot H,\ R = AO = \dfrac{1}{2}AD.$

3) $H = CD.$

4) Так как $\angle ACD = 45°$, то $\angle CAD = 45° \Rightarrow$ $\Rightarrow CD = AD = 9$ см.

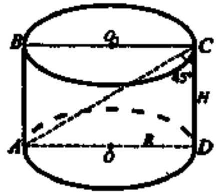


*Рис. 14*

5) $R = \dfrac{1}{2} \cdot 9 = 4{,}5$ (см).

6) $H = 9$ см.

7) $S_{бок.} = 2\pi RH,\ S_{бок.} = 2\pi \cdot 4{,}5 \cdot 9 = 81\pi$ (см$^2$).

(*Ответ*: $81\pi$ см$^2$.)

**V. Подведение итогов**

– На этом уроке мы повторили формулы, изученные на предыдущих уроках, и применили эти формулы в решении задач при выполнении самостоятельной работы.

---

**Домашнее задание**

а) Повторить п. 53, 54. б) № 539, 538, 535.

*№ 538 (рис. 15).*

1) $S_{бок.} = S$;

2) $S_{бок.} = 2\pi RH,\ 2\pi RH = S,\ 2RH = \dfrac{S}{\pi}$.

3) $S_{сеч.} = AD \cdot H = 2RH = \dfrac{S}{\pi}$.

(*Ответ*: $\dfrac{S}{\pi}$.)

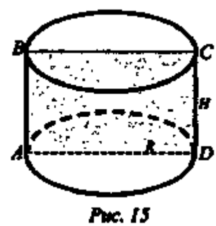


*Рис. 15*

*№ 539 (рис. 16).*

1) $S_{полн.} = 2\pi RH + \pi R^2$; $H = 3$ м, $d = 1{,}5$ м, $R = \dfrac{d}{2}$.

$S_{полн.} = \pi dH + R^2\pi = \pi \cdot 1{,}5 \cdot 3 + \pi(\dfrac{1{,}5}{2})^2 = 4{,}5\pi +$

$+ \pi \cdot \dfrac{2{,}25}{4} = 4{,}5\pi + 0{,}5625\pi = 5{,}0625\pi$ (м$^2$).

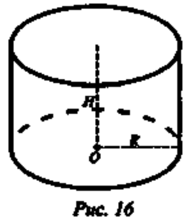


*Рис. 16*

2) Краска: $0{,}2 \cdot 5{,}0625\pi = 1{,}0125\pi$ (кг) $\approx 3{,}18$ кг.

(*Ответ*: 3,18 кг.)

*№ 535 (рис. 17).*

1) $OK \perp AB$;

2) Так как $\Delta AOB$ равнобедренный, то $K$ – середина $AB$;

3) $\operatorname{tg}30° = \dfrac{KB}{OK}$; $\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{BK}{2}$; $BK = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ (см).

4) $AB = 2KB, AB = 2 \cdot \dfrac{2}{\sqrt{3}} = \dfrac{4}{\sqrt{3}}$ (см);

5) $ABCD$ – прямоугольник (сечение). $S_{ABCD} = AB \cdot AD$, $AD = 10\sqrt{3}$ см;

$S_{ABCD} = \dfrac{4\sqrt{3}}{3} \cdot 10\sqrt{3} = 40$ (см$^2$).

(*Ответ*: 40 см$^2$.)

## §2 Конус
(уроки 19–21)

### Урок 19. Конус

*Цели урока:*

– формирование понятий конической поверхности, конуса;

– умение работать с рисунком и читать его;

– применение знаний в решении задач.

### Ход урока

**I. Организационный момент**

Сообщение темы урока, целей урока.

– Сдайте тетради с домашней работой. Приготовьте необходимые принадлежности: тетрадь по теории, рабочие тетради, ручку, карандаш, резинку.

**II. Объяснение новой темы**

– Сегодня мы рассматриваем пространственную геометрическую фигуру – «круглое», геометрическое тело – конус (показать макет конуса).

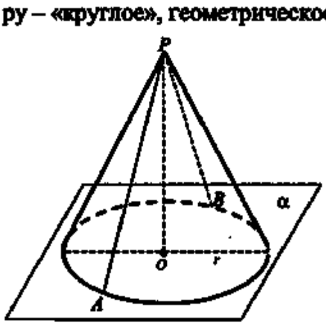



*Рис. 1*

1) Рассмотрим рисунок (готовый рисунок на доске).

На плоскости рассмотрим окружность с центром в точке $O$ и прямую $OP$, перпендикулярную к плоскости этой окружности. Соединим отрезком точку $P$ с каждой точкой окружности. Поверхность, образованная этими отрезками, называется конической поверхностью, а эти отрезки – образующими конической поверхности.

2) А теперь запишем определения новых понятий в тетрадях по теории и построим чертеж конуса.

Конической поверхностью называется поверхность, образованная отрезками, соединяющими каждую точку окружности с точкой перпендикуляра, проведенного к плоскости окружности через ее центр. Эти отрезки называются образующими конической поверхности.

3) Изображение конуса на чертеже:

*Комментарий учителя к построению*: изображением пространственной фигуры служит ее проекция на ту или иную плоскость. Одна и та же фигура допускает различные изображения. Обычно выбирается то из них, которое создает правильное представление о форме фигуры и наиболее удобно для исследования ее свойств. Здесь, граница круга – окружность – изображается на плоскости эллипсом.

4) Тело, ограниченное конической поверхностью и кругом, называется – *конусом*. Коническая поверхность называется *боковой поверхностью конуса*. Круг – *основанием конуса*.

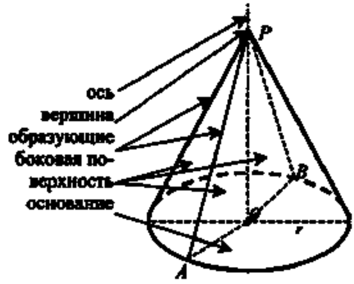


*Рис. 2*

Точка перпендикуляра к плоскости основания, проведенного через центр круга, называется *вершиной конуса* (на чертеже – точка $P$).

Образующие конической поверхности – *образующими конуса*. Прямая, проходящая через центр основания и вершину, называется *осью конуса*. Отрезок, соединяющий вершину конуса с центром круга, называется *высотой конуса*.

**III. Устные задачи – чтение графика – отработка нового материала**

1) Назвать две образующие конуса, сравнить их. Сделать вывод. (Добиться от учеников вывода равенства двух образующих конуса.)
2) Назвать углы наклона образующих конуса к плоскости основания, сравнить их. (Доказательство равенства углов.)
3) Каков угол между осью конуса и основанием. Почему?
4) Каков вид треугольника $AOP$?
5) Что за фигура образуется вращением прямоугольного треугольника относительно одного из катетов? (Показать наглядно, что получается.) В условии 1 вопроса, уточним: что образуется вращением гипотенузы? (Боковая поверхность конуса.) Что образуется вращением катета? (Основание.)
6) Каким способом можно получить конус?

**IV. Сечение конуса (Изучение новой темы по готовым чертежам)**

Учитель дает определения сечениям. Ученики записывают. По наводящим вопросам учителя ученики должны сказать, что представляет собой данное сечение и его основные свойства.

1) Сечение, проходящее через ось конуса, называется *осевым*.

*Вопросы*: какую фигуру представляет это сечение? (равнобедренный треугольник).

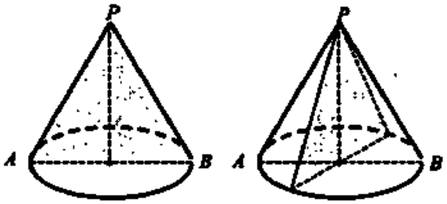



Рис. 4

Основание которого – диаметр основания конуса.

Боковые стороны – образующие конуса.

Высота треугольника – высота конуса.

2) Сечение, проходящее через вершину конуса, но не ось, – *треугольник*. Вопросы: вид треугольника. Чем являются боковые стороны?

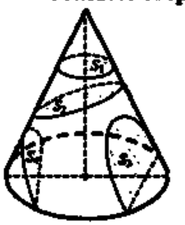



Рис. 5

3) Сечение, перпендикулярное оси конуса, – *круг*. ($S_1$) Вопросы: как найти коэффициент подобия сечения и основания? Как по радиусу основания найти радиус сечения?
4) Сечение плоскостью, пересекающей все образующие, – *эллипс*. ($S_2$)
5) Сечение плоскостью, параллельной двум образующим конуса, – *гипербола* ($S_3$).
6) Сечение плоскостью, параллельной одной образующей, – *парабола* ($S_4$). В школьном курсе часто применяются: осевое сечение и сечение, параллельное основанию.

**V. Историческая справка**

Исторически появление эллипса, параболы и гиперболы связано с изученнием конических сечений математиками Древней Греции. Основной труд Апполония Пергского так и назывался – «Конические сечения» (III век до н.э.). Эти кривые интересны еще и тем, что траектория движения небесных тел происходит по одной из этих кривых. Это так же траектория движения космических ракет.

**VI. Развертка конуса (рис. 6)**

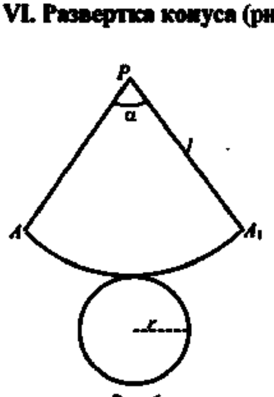



Рис. 6

1) Боковую поверхность конуса развернем на плоскость, разрезав ее по одной из образующих. Образуется круговой сектор, у которого радиусом является образующая конуса, а длина дуги сектора – длина окружности основания конуса.
2) За площадь боковой поверхности конуса принимается площадь ее развертки. Площадь кругового сектора равна $S=\frac{\pi l^2}{360}\cdot\alpha$, где $\alpha$ – градусная мера дуги $APA_1$; $l$ – образующая, $r$ – радиус основания.

Выразим α через $l$ и $r$. Длина дуги развертки равна длине дуги конуса окружности. $2\pi r = \frac{\pi l}{180}\cdot\alpha$ откуда $\alpha = \frac{360}{l}r$. Подставив в первоначальную формулу, получим: $2\pi r = \frac{\pi l^2}{360}\cdot\alpha = \frac{\pi l^2}{360}\cdot\frac{360r}{l} = \pi rl$.

Итак, *площадь боковой поверхности конуса* равна произведению половины длины окружности основания на образующую.

$$S_{бок.} = \pi rl$$

3) *Площадью полной поверхности конуса* называется сумма площадей боковой поверхности и основания.

$$S_{полн.} = \pi r(l + r).$$

## VII. Формирование умений и навыков учащихся

***Задача № 547.***

*Дано*: конус, $OP = 15$ см, $OB = r = 8$ см (рис. 7).

*Найти*: $PB$.

*Решение*: Из $\Delta OPB$ по теореме Пифагора; $PB = \sqrt{PO^2 + OB^2} = 17$. (*Ответ*: 17 см.)

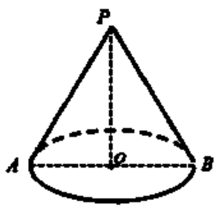


*Рис. 7*

***Задача № 549 а).***

*Дано*: конус. $O_2P = 8$ дм. $S_{сеч.} = \frac{1}{2}S$ (рис. 8).

*Найти*: $O_1P$.

*Решение*: Сечение и основание конуса – круги – подобны. Площади подобных фигур относятся как квадрат коэффициента подобия. $\frac{S_{сеч.}}{S_{осн.}} = \frac{1}{2}$;

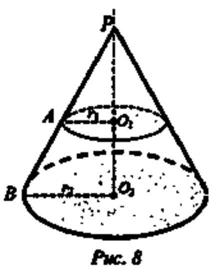


*Рис. 8*

$\frac{\pi r_1^2}{\pi r_2} = \frac{1}{2}$; $\frac{r_1}{r_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\Delta APO \sim \Delta BPO$; $\frac{r_1}{r_2} = \frac{PO_1}{PO_2}$.

Пусть $PO_1 = X$ дм, тогда $\frac{x}{8} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $X = 4\sqrt{2}$, $PO_1$ искомый отрезок. (*Ответ*: $4\sqrt{2}$ дм.)

## VIII. Подведение итогов

*Вопросы:*

1) Объясните, какое тело называется конусом?
2) Что такое образующая конуса?
3) Радиус основания конуса 3 см, высота 4 см. *Найти* образующую. (*Ответ*: 5 см.)

**Домашнее задание**

П. 55, 56, № 548, 549 *б*), 550.

## Урок 20. Конус

*Цели урока:*

- закрепление знаний о конической поверхности, конусе;
- умение работать с чертежом и читать его;
- рименение знаний в решении задач.

## Ход урока

**I. Организационный момент**

Сообщение темы урока, целей урока.

- Приготовьте необходимые принадлежности: тетрадь, листки с записью фамилии и № варианта, ручку, карандаш, резинку.
- Два ученика идут к доске записывают решение домашнего задания № 548, 549 б). Еще один ученик доказывает формулу площади полной поверхности конуса. Остальные учащиеся отвечают на вопросы математического диктанта.

**II. Актуализация опорных знаний**

**Математический диктант** (диктуется по вопросу для каждого варианта). См. приложение.

По окончании диктанта ученики первых парт собирают работы. На обратной стороне доски учащиеся видят ответы. Исходя из настроения детей, возможны объяснения ответов.

*I вариант*

1. Равнобедренный треугольник.
2. Круг.
3. Равнобедренный треугольник.
4. 50 $см^2$.
5. $\frac{\sqrt{2}}{2}a$

*II вариант*

1. Круг.
2. Прямоугольник.
3. Гипербола.
4. 9 $см^2$.
5. $\frac{\sqrt{3}}{2}a$

Проверяем задание домашней работы.

*Задача* *№ 548.* *Дано*: конус, $AP = 12$ см. $\angle PAO = \alpha$. а) $\angle PAO = 30°$. б) $\angle PAO = 45°$. в) $\angle PAO = 60°$ (рис. 1).

*Найти*: $S_{осн.}$

*Решение*:

1) Из $\Delta PAO$ $r = OA = 12 \cdot \cos \alpha$.
2) $S_{осн.} = \pi r^2$; $S_{осн.} = 144\pi\cos^2\alpha$.

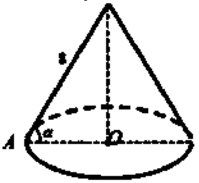


*Рис. 1*

3) Если $\alpha = 30°$, то $S_{осн.} = 144\pi \cdot \dfrac{3}{4} = 108\pi$, если $\alpha = 45°$, то

$$S_{осн.} = 144\pi \cdot \frac{1}{2} = 72\pi, \text{ если } \alpha = 60°, \text{ то } S_{осн.} = 144\pi \frac{1}{4} = 36\pi.$$

(*Ответ*: $108\pi$, $72\pi$, $36\pi$ см$^2$.)

***Задача № 549 б).***

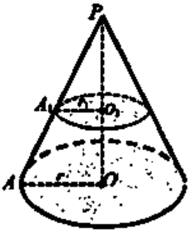


*Рис. 2*

*Дано*: конус, $OP = 8$ дм. $S_{сеч.} = \dfrac{1}{4} S_{осн.}$ (рис. 2).

*Найти*: $PO_2$.

*Решение*: Сечение и основание конуса – круги – подобные фигуры. $\dfrac{S_{сеч.}}{S_{осн.}} = \dfrac{1}{4}$; $\dfrac{\pi r_1^2}{\pi r_2^2} = \dfrac{1}{4}$. $\dfrac{r_1}{r} = \dfrac{1}{2}$;

$\Delta AOP \sim \Delta AOP$ с коэффициентом $\dfrac{1}{2}$. $O_1P = \dfrac{1}{2} OP$; $OP = 4$ дм. (*Ответ*: 4 дм.)

**III. Решение задач по готовым чертежам**

*Задачи даются по нарастающей сложности:*

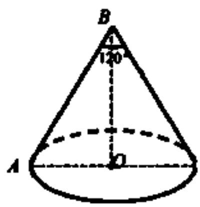


*Рис. 3*

1. *Дано*: Конус, $\angle ABC = 120°$, $AB = 6$ (рис. 3).

*Найти*: $R$, $H$.

*Решение*:

1) $\Delta ABC$ – равнобедренный, угол при основании $\angle A = \angle C = 30°$.
2) Из $\Delta ABO$ $H = BO = 3$. $R = AO = 3AB \cdot \cos 30° =$
$= 6 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$. (*Ответ*: $H = 3$, $R = 3\sqrt{3}$.)

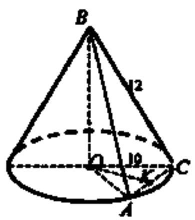


*Рис. 4*

2. *Дано*: Конус. $\Delta ABC$ – равносторонний, $AB = 12$, $R = 10$ (рис. 4).

*Найти*: $OK$, $H$.

*Решение*:

1) Из $\Delta BOC$ по теореме Пифагора $H = OB =$
$= \sqrt{BC^2 - OC^2}$. $H = \sqrt{12^2 - 10^2} = \sqrt{44} = 2\sqrt{11}$.
2) $\Delta ABC$ – равносторонний, $AC = 12$, $CK = 6$. Из $\Delta COK$ по теореме Пифагора $OK^2 = OC^2 - CK^2$,
$OK = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$.

(*Ответ*: $H = 2\sqrt{11}$, $OK = 8$.)

**IV. Слайд**

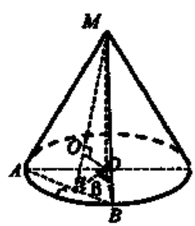


*Рис. 5*

Высота конуса равна $h$. Через образующие $MA$ и $MB$ проведена плоскость, составляющая угол $\alpha$ с плоскостью основания. Хорда $AB$ стягивает дугу с градусной мерой $\beta$ (рис. 5).

1) Докажите, что сечение конуса плоскостью $MAB$ – равнобедренный треугольник;
2) Объясните, как построить линейный угол двугранного угла, образованного секущей плоскостью и плоскостью основания;
3) Найдите $MC$;
4) Составьте (и объясните) план вычисления длины хорды $AB$;
5) Составьте план вычисления площади сечения $MAB$;
6) Покажите на рисунке, как можно провести перпендикуляр из точки $O$ к плоскости сечения $MAB$ (обоснуйте построение).

*Решение*:

1) Образующие конуса равны. Следовательно, стороны $\Delta MAB$ $MA = MB$, $\Delta MAB$ – равнобедренный.
2) $\Delta AOB$ – равнобедренный, так как две стороны – радиусы окружности. $\Delta AMB$ – равнобедренный, так как две стороны-образующие конуса. Треугольники имеют общее основание. Значит, высоты этих треугольников имеют общую точку-середину основания $AB$. По определению линейного угла: угол $MCO$ – является линейным углом двугранного угла, образованного секущей плоскостью $MAB$ и плоскостью основания конуса.
3) Из $\Delta COM$ $MC = \dfrac{h}{\sin\alpha}$.
4) Из $\Delta COM$ $OC = \dfrac{h}{\operatorname{tg}\alpha}$. $\Delta AOB$ – равнобедренный. $OC$ – высота является медианой и биссектрисой. Из $\Delta BOC$ – прямоугольный. $BC = OC \cdot \operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2} = \dfrac{h\operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2}}{\operatorname{tg}\alpha}$. $AB = 2BC = \dfrac{2h\operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2}}{\operatorname{tg}\alpha}$.
5) $S_{AMB} = \dfrac{1}{2}AB \cdot MC = \dfrac{h^2\operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2}}{\operatorname{tg}\alpha \cdot \sin\alpha}$.
6) Плоскость $COM$ перпендикулярна плоскости $BAM$, т.к. одна из плоскостей ($COM$) проходит через перпендикуляр к другой ($BC$). Поэтому перпендикуляр $OO_1$ к прямой $MC$ является перпендикуляром к плоскости $BAM$.

Учащиеся могут объяснять и по-другому: Строим $OO_1 \perp CM$, получаем $OO_1$ перпендикулярен двум пересекающимся прямым $MC$ и $BC$, следовательно, $OO_1$ – перпендикуляр к плоскости $BAM$. В зависимости от уровня класса в 5) и 6) задании можно рассказать только план решения.

**V. Решение задач учебника**

***Задача № 551 а)***

Строим чертеж к задаче и обсуждаем:

Назовите длину образующей конуса – 2 $r$.

Какая фигура получается сечением конуса, проходящим через 2 образующие? Равнобедренный треугольник, две стороны которого $2r$ и угол между ними задан – 30°.

Вспомните и подберите нужную формулу площади треугольника.

$$S = \frac{1}{2}ab\sin\alpha$$

Решают самостоятельно. Потом один из учеников проговаривает свое решение. На кодоскопе показать возможную запись.

*Дано*: конус, $MPN$ – осевое сечение. $MP = PN = 2r$, $\angle APB = 30°$ (рис. 6).

*Найти*: $S$.

*Решение*: Все образующие конуса $2r$, $\Delta APB$ – равнобедренный, $S = \frac{1}{2}AP \cdot PB \sin\angle APB$. $S = \frac{1}{2} \cdot 2r \cdot 2r \cdot \frac{1}{2} = r^2$. (*Ответ*: $r^2$.)

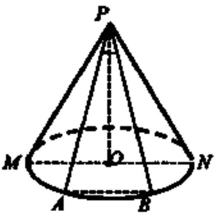


*Рис. 6*

***Задача № 553.***

Обсуждаем:

Выразите данную формулу $S_{осев.}$ через высоту и радиус основания: $S = RH$.

Сколько неизвестных? – 2.

Выразите $S_{осн.}$ формулой ($S_{осн.} = \pi r^2$).

***Вывод:*** Из формулы $S_{осн.}$ находим $r$ и, подставляя $r$ в формулу $S_{осн.}$, находим $h$ (рис. 7).

***Решение***:

1) $S_{осн.} = \pi r^2$; $\pi r^2 = 8$; $r = \sqrt{\frac{8}{\pi}}$;

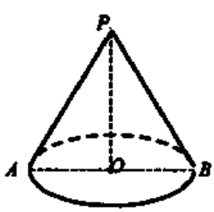


*Рис. 7*

2) Из $\Delta ABP$ имеем: $AB = 2r$; $S_{ABP} = \frac{1}{2}AB \cdot OP = \frac{1}{2} \cdot 2r \cdot OP = r \cdot OP$; $6 = OP \cdot \sqrt{\frac{8}{\pi}}$; $OP = 6 \cdot \sqrt{\frac{\pi}{8}} = \frac{3\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2\pi}}{2}$.

(*Ответ*: $\frac{3\sqrt{2\pi}}{2}$.)

**VI. Подведение итогов**

*Вопросы:*

1. Какая фигура получается в сечении конуса плоскостью, проходящей через ось конуса? (*Ответ*: равнобедренный треугольник.)
2. Какая фигура получается в сечении цилиндра плоскостью, проходящей перпендикулярно оси цилиндра? (*Ответ*: круг.)

**Домашнее задание**

П. 55, 56, № 554 а), 555 а), 563.

***Решение домашнего задания***

***Задача № 563.*** *Дано*: конус, $OP = 1{,}2$ см, $S_{осев.} = 0{,}6$ см$^2$ (рис. 8).

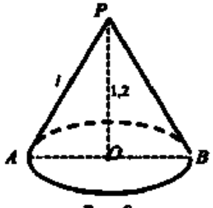


*Рис. 8*

*Найти*: $S_{полн.}$

*Решение*:

1) Осевое сечение – треугольник: высота 1,2 см и основание $2r$. $S_{осев.} = \frac{1}{2} \cdot 2rH$;

$S_{осев.} = rH$; $r = \frac{S}{H}$; $r = \frac{0{,}6}{1{,}2} = 0{,}5$; $r = 0{,}5$ см.

2) Из $\Delta AOP$ по теореме Пифагора $l = AP = \sqrt{OP^2 + OA^2}$; $l = \sqrt{1{,}2^2 + 0{,}5^2} = \sqrt{1{,}44 + 0{,}25} = \sqrt{1{,}69} = 1{,}3$; $L = 1{,}3$ см.

3) $S_{полн.} = \pi r\,(r + l)$; $S_{полн.} = \pi 0{,}5\ (0{,}5 + 1{,}3) = \pi \cdot 0{,}5 \cdot 1{,}8 = 0{,}9\pi$.

(*Ответ*: $0{,}9\pi$ см$^2$.)

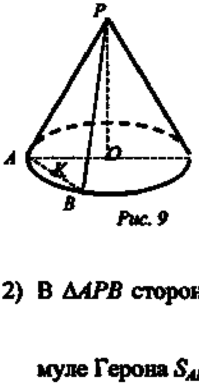


*Рис. 9*

***Задача № 554 а).*** *Дано*: конус, $l$, $r$, $\angle AOB = 60°$ (рис. 9).

*Найти*: $S_{ABP}$.

*Решение*:

1) В $\Delta AOB$ – равносторонний ($\angle AOB = 60°$ – угол при вершине равнобедренного $\Delta AOB$ $OA = OB = r$). Следовательно, $AO = BO = AB = r$.

2) В $\Delta APB$ стороны $AP = BP = l$, $AB = r$; $P = 2l + r$; $\frac{P}{2} = l + r$. По формуле Герона $S_{APB} = \sqrt{\frac{P}{2}(\frac{P}{2} - l)(\frac{P}{2} - l)(\frac{P}{2} - r)}$ получим,

$$S_{APB} = \sqrt{(l + \frac{r}{2})\frac{r}{2} \cdot \frac{r}{2}(l - \frac{r}{2})} = \frac{r}{2}\sqrt{l^2 - \frac{r^2}{4}} = \frac{r}{4}\sqrt{4l^2 - r^2}.$$

(*Ответ*: $\frac{r}{4}\sqrt{4l^2 - r^2}$.)

***Задача № 555 а).*** *Дано*: конус, $OP = 10$ см, $\angle PKO = 30°$, $\angle AOB = 60°$.

*Найти*: $S_{ABP}$

*Решение*:

1) $\Delta KOP$ – прямоугольный: $KP = 2OP$; $KP = 20$ см, так как катет $OP$ – лежит напротив угла 30° и равен половине гипотенузы $KP$. $OK = \frac{OP}{tgPKO}$; $OK = \frac{10}{tg30°} = 10\sqrt{3}$.

2) $\Delta AOB$ – равносторонний, так как $\angle AOB = 60°$ – при вершине равнобедренного треугольника, $OK$ – является высотой, биссектрисой. Из

$\Delta BOR$ $OB = \dfrac{OK}{\cos BOK}$; $OB = \dfrac{10\sqrt{3}}{\cos 30^\circ} = 20$; $OB = 20$ см. $AO = BO = AB$; $AB = 20$.

3) $S_{ABP} = \dfrac{1}{2} AB \cdot PK$; $S_{ABP} = \dfrac{1}{2} \cdot 20 \cdot 20 = 200$; $S = 200$ см2.

(*Ответ*: 200 $см^2$.)

## Урок 21. Усеченный конус

*Цели урока:*

– ввести понятие усеченного конуса;
– вывести формулы для вычисления площади боковой и полной поверхности усеченного конуса;
– разобрать задачи по данной теме.

## Ход урока

**I. Организационный момент**

**II. Актуализация опорных знаний**

1) Проверка домашнего задания. У доски два человека делают чертеж и пишут решение № 562 и 563.
2) Третий ученик и класс решают задачу по планиметрии: Найти боковую сторону равнобедренной трапеции, если ее основания 6 см и 12 см, а высота 4 см.

*Дано:* $ABCD$ – равнобокая трапеция, $BC \parallel AD$; $BC = 6$ см, $AD = 12$ см. $BH = 4$ см – высота (рис. 1).

*Найти:* $CD$.

*Решение:* $BH = CK$ – высоты, $BA = CD$, $\Delta ABH = \Delta DCK$ (по катету и гипотенузе) $AH = KD = (AD - BC) : 2$. $AH = KD = 3$ см, из $\Delta DCK$, $\angle K = 90^\circ$, $CD = \sqrt{CK^2 + KD^2}$, $CD = 5$ см. (*Ответ*: $CD = 5$ см.)

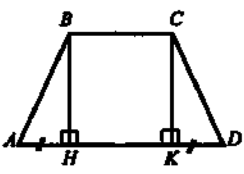



*Рис. 1*

3) Сравните домашние задачи и решение на доске. Какие еще есть вопросы по домашней работе?

**III. Изучение новой темы**

Сегодня мы познакомимся еще с одной геометрической фигурой и ее свойствами. Запишите тему урока «Усеченный конус». Посмотрите на модель конуса, я провожу секущую плоскость, перпендикулярно оси конуса. Эта плоскость, разбивает наш конус на две части. Одна часть – это меньший конус – подобный данному, а другая называется усеченным конусом. Посмотрите на рис. 145 с. 125 учебника. А теперь изучите рисунок усеченного конуса (рис. 147, с. 126).

А теперь делаем рисунок в тетрадь и работаем с ним (рис. 1).

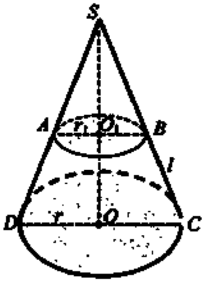



*Рис. 2*

1. Основания усеченного конуса (2 круга).
2. Высота усеченного конуса $O_1O$ (расстояние между плоскостями оснований).
3. Ось усеченного конуса $b$.
4. Особое сечение усеченного конуса (равнобокая трапеция с основаниями $2R$ и $2R_1$, где $R$ и $R_1$ радиусы оснований усеченного конуса) $ABCD$ – трапеция.
5. Образующие усеченного конуса равны $l$ (это отрезки, соединяющие соответственные точки окружностей оснований, например $AD$, $BC$). Если мы вспомним задачу, которую решали в начале урока, то исходя из $l^2 = H^2 + (R - R_1)^2$ решим устно № 567.
6. Боковая поверхность усеченного конуса (часть конической поверхности, ограничивающая усеченный конус). $S_б = \pi R \cdot SC - \pi R_1 \cdot SB = \pi R(SB + BC) - \pi R_1 \cdot SB = \pi Rl + \pi(R - R_1) \cdot SB$. $\Delta SO_1B \sim \Delta SOC$, так как $\angle O = \angle O_1 = 90°$ и $\angle S$ – общий, $\frac{SB}{SC} = \frac{R}{R_1}$ или $\frac{SB}{SB + l} = \frac{R_1}{R}$.

   $SB = \frac{l \cdot R_1}{R - R_1}$. $S_б = \pi \cdot (R + R_1) \cdot l = \pi \cdot l(R + R_1)$.
7. Полная поверхность усеченного конуса $S_п = \pi \cdot (lR + lR_1 + R^2 + R_1^2)$.
8. Усеченный конус получается также вращением прямоугольной трапеции вокруг ее боковой стороны, перпендикулярной основанием (посмотрите рис. 148 на с. 126).

## IV. Закрепление изученного материала

***Задача № 572.***

$S_б = \pi l(R + R_1) \approx 0{,}075$ м$^2$; $S_п = 2S_б + 2S_0 = 0{,}15\pi + 2\pi \cdot 0{,}1^2 = 0{,}17\pi$. Расход краски: $0{,}17\pi \cdot 100 \cdot 0{,}15 = 2{,}55\pi \approx 8{,}011$ кг. (*Ответ*: $2{,}55\pi \approx 8{,}011$ кг.)

## V. Подведение итогов

– Итак, сегодня на уроке мы узнали о свойствах усеченного конуса и на примере убедились в практической значимости теоретических знаний геометрии.
– Какую форму имеет осевое сечение усеченного конуса? (*Ответ:* Осевое сечение усеченного конуса является равнобедренной трапецией.)

---

## Домашнее задание

П. 57. I уровень № 568, 569, 571 и II уровню добавляем № 618.

***Задача № 618.***

*Дано*: усеченный конус, $ABDC$ – осевое сечение, $BC \perp AD$; $S_{ABCD} = 36$ дм$^2$ (рис. 3).

$a = 40$ см – одно основание.

*Найти*: $S_{б.}$ и $S_{п.}$ усеченного конуса.

*Решение*:

1. Если диагонали равнобокой трапеции взаимно перпендикулярны, то $S_{ABDC}=h^2$, тогда $OO_1=h=6$ дм и $S_{ABCD}=\frac{a+b}{2}\cdot h$; $36=(4+b)\cdot\frac{6}{2}$.

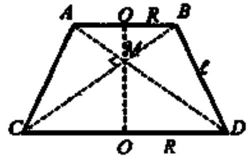



*Рис. 3*

$12=4+b$, $b=12-4$, $b=8 \Rightarrow AB=4$; $CD=8$ дм. $R_1=2$, $R=4$; $l=h^2+(R-R_1)^2$, $l^2=36+4=40$ дм.

$S_б=\pi\cdot l\cdot(R+R_1)=\pi\sqrt{40}\cdot(2+4)=6\pi\sqrt{40}=12\pi\sqrt{10}$ дм$^2$. $S_{п.}=\pi(l\cdot R+$ $+lR_1+R^2+R_1{}^2)$. $S_{п.}=\pi(2\sqrt{10}\cdot4+2\sqrt{10}\cdot2+16+4)=\pi(8\sqrt{10}+4\sqrt{10}+20)=$ $=\pi(12\sqrt{10}+20)=4\pi(3\sqrt{10}+5)$ дм$^2$.

(*Ответ*: $S_{б.}=12\pi\sqrt{10}$ дм$^2$; $S_{п.}=4\pi(3\sqrt{10}+5)$ дм$^2$.)

## § 3. Сфера (11 ч) (уроки 22–32)

### Урок 22. Сфера. Уравнение сферы

*Цели урока:*

- ввести понятие сферы, шара и их элементов;
- вывести уравнение сферы в заданной прямоугольной системе координат;
- формировать навык решения задач по данной теме.

### Ход урока

**I. Организационный момент**

**II. Самостоятельная работа** (см. приложение).

*Самостоятельная работа записывается в домашних тетрадях.*

*Решение:*

***I уровень***

***Вариант I***

*Дано:* усеченный конус, $O_1C=3$ см, $OD=6$ см, $OO_1=4$ см (рис. 1).

*Найти*: $S_{сеч.}$, $S_{бок.}$

*Решение*: $S_{бок.}=\pi(r+r_1)l=$ $=\pi(O_1C+OD)CD$. Осевым сече-

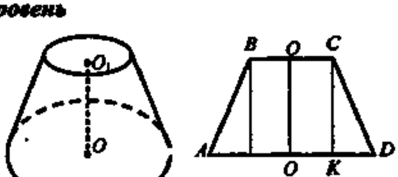



*Рис. 1*

нием усеченного конуса является равнобедренная трапеция. $S_{сеч.} = \frac{BC+AD}{2}\cdot OO_1$. $BC = 2O_1C = 2\cdot 3 = 6$ (см), $AD = 2OD = 2\cdot 6 = 12$ (см).

$S_{сеч.} = \frac{6+12}{2}\cdot 4 = 18\cdot 2 = 36$ (см$^2$). $\Delta CKD$ – прямоугольный, по теореме Пифагора $CD = \sqrt{CK^2+KD^2}$ $CK = OO_1 = 4$ (см), $KD = O_1C = 6-3 = 3$ (см). $CD = \sqrt{4^2+3^2} = \sqrt{25} = 5$ (см). $S_{бок.} = \pi(3+6)\cdot 5 = \pi\cdot 9\cdot 5 = 45\pi$ (см$^2$). (*Ответ*: $S_{сеч} = 36$ см$^2$, $S_{бок.} = 45\pi$ см$^2$.)

***Вариант II***

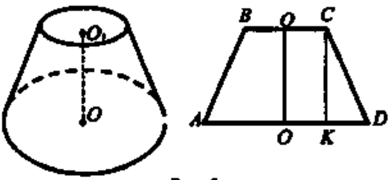


*Рис. 2*

*Дано*: усеченный конус, $OD = 7$ см, $CD = 5$ см, $OO_1 = 4$ см (рис. 2).

*Найти*: $S_{сеч.}$, $S_{бок.}$

*Решение*: Осевым сечением усеченного конуса является равнобедренная трапеция. $S_{сеч.} = \frac{BC+AD}{2}\cdot OO_1$. $S_{бок.} = \pi(O_1C + OD)\cdot CD$. $\Delta CKD$ – прямоугольный, по теореме Пифагора $KD = \sqrt{CD^2-KC^2}$ $KC = OO_1 = 4$ (см) $KD = \sqrt{5^2-4^2} = \sqrt{9} = 3$ (см) $O_1C = OD - KD = 7-3 = 4$ (см), $BC = 2O_1C = 8$ (см); $AD = 2OD = 14$ (см). $S_{сеч.} = \frac{8+14}{2}\cdot 4 = 22\cdot 2 = 44$ (см$^2$). $S_{бок.} = \pi(4+7)\cdot 5 = 55\pi$ (см$^2$). (*Ответ*: $S_{сеч.} = 44$ см$^2$, $S_{бок.} = 55\pi$ см$^2$.)

## *II уровень*

***Вариант I***

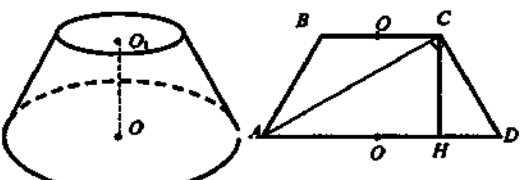


*Рис. 3*

*Дано:* усеченный конус, $AC = 40$ см, $AC \perp CD$, $CD = 30$ см (рис. 3).

*Найти*: $S_{сеч.}$, $S_{г}$.

*Решение*: Сечение усеченного конуса является равнобедренная трапеция $S_{сеч.} = \frac{BC+AD}{2}\cdot OO_1$ $S_г = S_{бок.} + S_o'$, $S_{бок.} = \pi(r+r_1)l$, $S_o = \pi r^2$, $S_o' = \pi r_1^2$. $\Delta ADC$ – прямоугольный, по теореме Пифагора $AD = \sqrt{AC^2+CD^2} = \sqrt{40^2+30^2} = 50$ (см). Так как $CH$ – высота прямоугольного треугольника, то $CH^2 = AH\cdot HD$. $\Delta CHD$ – прямоугольный; $CH^2 = CD^2 - HD^2$. $HD = AD - AH = 50 - AH$. $AH\cdot HD = CD^2 - HD^2$. $AH(50 - AH) = 900 - (50-AH)^2$. $50AH - AH^2 = 900 - 2500 + 100AH - AH^2$. $AH =$

$= 32$ (см) $HD = 50 - 32 = 18$ (см) $OD = AD : 2 = 25$ (см). $OH = OD - HD = 25 - 18 = 7$ (см). $CH = \sqrt{32 \cdot 18} = 24$ (см). $S_{сеч.} = \frac{14+50}{2} \cdot 24 = 768$ (см$^2$). $S_т = \pi(O_1C \cdot CD + OD \cdot CD + OD^2 + O_1C^2) = \pi(7 \cdot 30 + 25 \cdot 30 + 25^2 + 7^2) = 1634$ (см$^2$). (*Ответ*: $S_{сеч.} = 768$ см$^2$, $S_т = 1634\pi$ см$^2$.)

***Вариант II***

*Дано*: Усеченный конус, $O_1C = 1$ дм, $OD = 7$ дм, $BD \perp AC$ (рис. 4).

*Найти*: $S_{сеч.}$, $S_т$.

*Решение*: Осевым сечением усеченного конуса является равнобедренная трапеция. $S_{сеч.} = \frac{BC + AD}{2} \cdot OO_1$. $S_т = \pi(OD \cdot CD + O_1C \cdot CD + OD^2 + O_1C^2)$. $BC = 2O_1C = = 2$ (дм), $AD = 2OD = 14$ (дм). $\Delta BMC$ – прямоугольный и равнобедренный: $MC^2 = \frac{BC^2}{2}$, $MC = \sqrt{2}$ (дм). $\Delta AMD$ – прямоугольный и равнобедреный: $AM^2 = \frac{AD^2}{2}$, $AM = 7\sqrt{2}$ (дм). $AC = AM + MC = 7,\sqrt{2} + \sqrt{2} = 8\sqrt{2}$ (дм). $\Delta MO_1C$ – прямоугольный: $O_1M = \sqrt{MC^2 - O_1C^2} = \sqrt{(\sqrt{2})^2 - 1^2} = \sqrt{1} = 1$ (дм). $\Delta AOM$ – прямоугольный: $OM = \sqrt{AM^2 - AO^2} = \sqrt{(7\sqrt{2})^2 - 7^2} = \sqrt{49} = 7$ (дм). $OO_1 = O_1M + OM = 7 + 1 = 8$ (дм) $OO_1 = CH$. $\Delta CHD$ – прямоугольный : $CD^2 = HD^2 + CH^2 = 6^2 + 8^2 = 100$. $CD = 10$ (дм). $S_{сеч.} = \frac{2+14}{2} \cdot 8 = 16 \cdot 4 = 64$ (дм$^2$). $S_т = \pi(7 \cdot 10 + 1 \cdot 10 + 7^2 + 1^2) = 130\pi$ (дм$^2$). (*Ответ*: $S_{сеч.} = 64$ дм$^2$, $S_т = 130\pi$ дм$^2$.)

### *III уровень*

***Вариант I***

*Дано*: усеченный конус $O_1C = 16$ см, $OD = 25$ см. Окружность, вписанная в сечение (осевое) (рис. 5).

*Найти*: $S_т$.

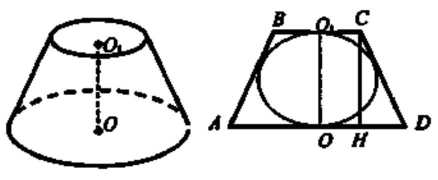


Рис. 5

*Решение*: $S_т = \pi(O_1C \cdot CD + OD \cdot CD + OD^2 + O_1C^2)$. Осевым сечением усеченного конуса является равнобедренная трапеция. Так как в трапецию вписана окружность, то $O_1C = CF = 16$ (см) и $OD = DF = 25$ (см) (как отрезки касательных к окружности, проведенных из одной точки). $CD = CF + DF = 16 + 25 = 4$ (см) $HD = OD - O_1C = 25 - 16 = 9$ (см). $\Delta CHD$ – прямоугольный: $CH = \sqrt{41^2 - 9^2} = 40$ (см). $S_т = \pi(16 \cdot 41 + 25 \cdot 41 + 16^2 + 25^2) = 2562\pi$ (см$^2$). (*Ответ*: $S_т = 2562\pi$ см$^2$.)

***Вариант II***

*Дано*: усеченный конус, $AF = 35$ см, $FC = 10$ см, $CD = 39$ см (рис. 6).

*Найти*: $S_т$.

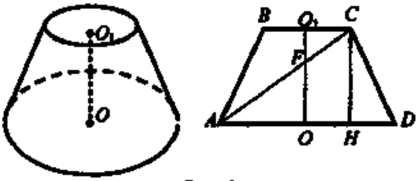


Рис. 6

*Решение*: $S_т = \pi(OD \cdot CD + O_1C \cdot CD + OD^2 + O_1C^2)$. $AC = AF + FC = 35 + 10 = 45$ (см). $\Delta AOF \propto \Delta AHC$ (по двум углам): $\frac{AF}{AC} = \frac{AO}{AH} = \frac{35}{45}$. $AO = \frac{7}{9}AH$, $OH = AH - AO = AH - \frac{7}{9}AH = \frac{2}{9}AH$. $\Delta ACH$ – прямоугольный: по теореме Пифагора $CH^2 = AC^2 - AH^2 = 45^2 - AH^2$. $\Delta CHD$ – прямоугольный: $CH^2 = CD^2 - HD^2 = 39^2 - (OD - OH)^2 = 39^2 - (\frac{7}{9}AH - \frac{2}{9}AH)^2 = 39^2 - \frac{25}{81}AH^2$.

$2025 - AH^2 = 1521 - \frac{25}{81}AH^2$. $AH^2 = \frac{81 \cdot 504}{56}$. $AH^2 = 729$. $AH = 27$ (см). $AO = OD = \frac{7}{9}AH = \frac{7}{9} \cdot 27 = 21$ (см) $OH = O_1C = \frac{2}{9} \cdot 27 = 6$ (см). $S_т = \pi(21 \cdot 39 + 6 \cdot 39 + 21^2 + 6^2) = 1530\pi$ (см$^2$). (*Ответ*: $S_т = 1530\pi$ см$^2$.)

**III. Изучение нового материала**

Вспомните определение окружности.

**Окружность – множество точек плоскости, равноудаленных от данной точки.**

Дайте определение сферы.

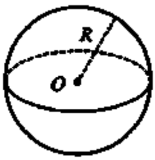


Рис. 7

**Сферой называется поверхность, состоящая из всех точек пространства, расположенных на данном расстоянии от данной точки.**

Данная точка $O$ называется центром сферы, а данное расстояние – радиусом сферы. Обозначается $R$. Любой отрезок, соединяющий центр и какую-нибудь точку сферы, также называется радиусом сферы. Отрезок, соединяющий две точки сферы и проходящий через ее центр, называется диаметром сферы. Диаметр сферы равен $2R$. Вспомните определение круга.

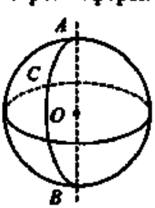


Рис. 8

Круг – это часть плоскости, ограниченная окружностью.

Дайте определение шара:

**Тело, ограниченное сферой, называется шаром.**

Существует и другое определение шара:

**Шаром радиуса $R$ с центром в точке $O$ называется тело, которое содержит все точки пространства, расположенные от точки $O$ на расстоянии, не превышающем $R$ (включая $O$), и не содержит других точек.**

Сфера может быть получена вращением полуокружности вокруг ее диаметра, а шар – вращением полукруга вокруг его диаметра.

Сфера получена вращением полуокружности $ACB$ вокруг диаметра $AB$.

Прежде чем вывести уравнение сферы познакомимся с понятием уравнения поверхности в пространстве.

Введем прямоугольную систему координат $Oxyz$ и некоторую поверхность $F$.

Уравнение с тремя переменными $x$, $y$, $z$ называется уравнением поверхности $F$, если этому уравнению удовлетворяют координаты любой точки поверхности $F$ и не удовлетворяют координаты никакой точки, не лежащей на этой поверхности.

Выведите самостоятельно уравнение сферы радиуса $R$ с центром $C(x_0, y_0, z_0)$, используя формулу для вычисления расстояния между двумя точками с заданными координатами.

Найдите расстояние от произвольной точки $M(x, y, z)$ до $C(x_0, y_0, z_0)$ (рис. 9).

$MC = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$.

Если точка $M$ лежит на сфере, то $MC = R$.

$R = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$ так, как любая точка сферы, то уравнение сферы $R^2 = (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2$.

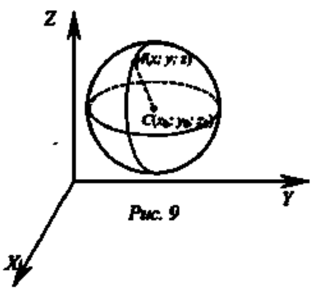


Рис. 9

Если же точка $M$ не лежит на данной сфере, то $MC \neq R$, т.е. координаты точки $M$ не удовлетворяют уравнению $R^2 = (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2$. Следовательно, в прямоугольной системе координат уравнение сферы радиуса $R$ с центром $C(x_0, y_0, z_0)$ имеет вид $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = R^2$.

**IV. Закрепление изученного материала**

***№ 573 а).*** *Дано*: $A$ и $B$ лежат на сфере, $O \notin AB$, $AM = MB$ (рис. 10).

*Доказать*: $OM \perp AB$.

*Доказательство*: $\Delta AOB$ – равнобедренный ($AO = OB = R$), $AM = MB$ (по условию), значит $OM$ – медиана $\Delta AOB$. Так как медиана в равнобедренном треугольнике, опущенная к основанию, является высотой, то $OM \perp AB$.

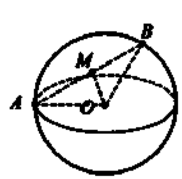


Рис. 10

***№ 574 а)*** (используется тот же чертеж) решить самостоятельно.

*Дано*: $A$ и $B$ лежат на сфере, $R = 50$ см, $AB = 40$ см. $AM = MB$.

*Найти*: $OM$.

Так как $OM \perp AB$ (смотрите предыдущую задачу), то $\Delta AMO$ – прямоугольный. По теореме Пифагора $OM = \sqrt{AO^2 - AM^2}$, $AO = R = 50$ (см),

$AM=\frac{1}{2}AB=20$ (см). $OM=\sqrt{50^2-20^2}=\sqrt{2100}=10\sqrt{21}$ (см).

(*Ответ*: $10\sqrt{21}$ см.)

***№ 576 а). Дано***: $R = 3$; $A$ (2; –4; 7).

*Найти:* уравнение сферы.

*Решение*: $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$. $(x-2)^2+(y+4)^2+(z-7)^2=9$.

***№ 578*** решить устно а) $O$ (0; 0; 0), $R = 7$ б) $A$ (3; –2; 0), $R=\sqrt{2}$.

***№ 577 в). Дано***: $A$ (–2; 2; 0); $N$ (5; 0; –1).

*Найти*: уравнение сферы с центром в $A$.

*Решение*: $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$. Так как сфера проходит через точку $N$, значит, ее координаты удовлетворяют уравнению сферы. $(x-2)^2+(y-2)^2+z^2=R^2$; $R^2=(5+2)^2+(0-2)^2+(-1)^2=9+4+1=54$; $(x+2)^2+(y-2)^2+z^2=54$.

***Дополнительная задача***

***№ 579 а) г)***

а) $x^2-4x+y^2+z^2=0$; $x^2-4x+4-4+y^2+z^2=0$; $(x-2)^2+y^2+z^2=4$. (*Ответ*: $O$ (2; 0; 0), $R=2$.)

г) $x^2-x+y^2+3y+z^2-2z=2{,}5$; $x^2-x+0{,}25-0{,}25+y^2+3y+2{,}25-2{,}25+z^2-2z+1-1=2{,}5$; $(x-0{,}5)^2+(y+1{,}5)^2+(z-1)^2=6$.

(*Ответ*: $O$ (0,5; –1,5; 1), $R=\sqrt{6}$.)

**V. Подведение итогов**

Повторить определение сферы, шара.

*Вопросы:*

- Как может быть получена сфера, шар?
- Какой вид имеет уравнение сферы?

---

**Домашнее задание**

П. 58, 59. I уровень № 573 б), № 576 в); II уровень № 577 в)

***Дополнительная задача.***

Сфера задана уравнением $x^2+y^2+z^2+2y-4z=4$.

а) *Найдите* координаты центра и радиус сферы.

б) *Найдите* значение $m$, при котором точки $A$ (0; $m$; 2) и $B$ (1; 1; $m-2$) принадлежат данной сфере.

## Урок 23. Взаимное расположение сферы и плоскости

*Цели урока:*

- рассмотреть возможные случаи взаимного расположения сферы и плоскости;
- формировать навык решения задач по теме.

## Ход урока

### I. Организационный момент

Сообщить тему урока и сформулировать цели урока.

### II. Актуализация знаний учащихся

Проверка домашнего задания № 573 (б), № 576 (в), № 577 (в) проверить фронтально.

***Задача № 573 б)*** по готовому чертежу

*Дано*: сфера, $A$ и $B$ принадлежит сфере, $OM \perp AB$ (рис. 1).

*Доказать*: $M$ – середина $AB$.

*Доказательство*: Рассмотрим $\Delta AMO$ и $\Delta BMO$ – прямоугольные. $\Delta AMO = \Delta BMO$ ($MO$ – общий катет; $OA = OB = R$ – гипотенузы). $\Rightarrow AM = MB$, значит $M$ – середина $AB$.

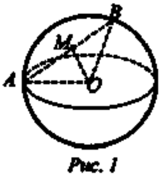


*Рис. 1*

***Задача № 576 в)*** $(x-2)^2 + y^2 + z^2 = 16$.

***Задача № 577 в)*** $A\,(0; 0; 0)$; $N\,(5; 3; 1)$; $5^2 + 3^2 + 1^2 = R^2$. $R^2 = 35$. $x^2 + y^2 + z^2 = 35$.

Записать на доске решение дополнительной задачи.

*Дано*: уравнение сферы, $x^2 + y^2 + z^2 + 2y - 4z = 4$.

*Найти*: а) $O\,(x_0; y_0; z_0)$, $R$; б) $m$, при котором $A\,(0; m; 2)$ и $B\,(1; 1; m-2)$ принадлежат сфере.

*Решение*: а) $x^2 + y^2 + 2y + z^2 - 4z = 4$. $x^2 + y^2 + 2y + 1 - 1 + z^2 - 4z + 4 - 4 = 4$. $x^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 9$. $O\,(0; -1; 2)$, $R = \sqrt{9} = 3$. б) $A\,(0; m; 2)$ и $B\,(1; 1; m-2)$.

$$\begin{cases} 0^2 + (m+1)^2 + (2-2)^2 = 9, \\ 1^2 + (1+1)^2 + (m-2-2)^2 = 9; \end{cases} \quad \begin{cases} (m+1)^2 = 9, \\ (m-4)^2 = 4; \end{cases} \quad \begin{cases} m+1 = \pm 3, \\ m-4 = \pm 2; \end{cases} \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m = -4, \\ m = 2, \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} m = 6, \\ m = 2. \end{array}\right. \end{cases}$$

При $m = 2$ точки $A$ и $B$ принадлежат сфере. (*Ответ*: а) $O\,(0; -1; 2)$, $R = 3$; б) при $m = 2$.)

### III. Математический диктант

(см. приложение)

*Ответы*:

***Вариант I***: 1) $O\,(2; -3; 0)$, $R = 5$. 2) $(x-2)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 49$. 3) Да. 4) Нет. 5) Нет, не могут. 6) $S = \pi R^2$. 7) $O\,(3; 0; 0)$, $R = 3$.

***Вариант II***: 1) $O\,(-3; 0; 1)$, $R = 4$. 2) $(x+2)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 16$. 3) Да. 4) Да. 5) Да, могут. 6) $l = 2\pi R$. 7) $O\,(0; -3; 0)$, $R = 3$.

### IV. Изучение нового материала

Исследуем взаимное расположение сферы и плоскости в зависимости от соотношения между радиусом сферы и расстоянием от ее центра до плоскости.

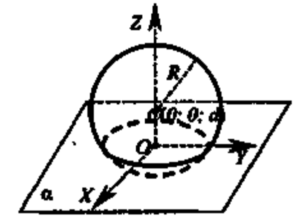


*Рис. 2*

Выберем прямоугольную систему координат $Oxyz$ так, что центр сферы радиуса $R$ имеет координаты $C\,(0; 0; d)$, где $d$ – расстояние от центра сферы до данной плоскости $\alpha$, а сама плоскость $\alpha$ совпадает с координатной плоскостью $Oxy$. Поэтому сфера имеет уравнение $x^2+y^2+(z-d)^2=R^2$, а уравнение плоскости $\alpha$ имеет вид $z=0$. Почему? Аппликата $z$ любой точки плоскости $Oxy$ равна нулю, т.е. координаты любой точки плоскости $Oxy$ удовлетворяют уравнению $z=0$, а координаты любой точки, не лежащей в плоскости $Oxy$, этому уравнению не удовлетворяют, т.к. аппликаты таких точек не равны нулю. Тем самым в соответствии с понятием уравнения поверхности уравнение $z=0$ является уравнением координатной плоскости $Oxy$.

Рассмотрим систему уравнений $\begin{cases} x^2+y^2+(z-d)^2=R^2. \\ z=0 \end{cases}$ При $z=0$ $x^2+y^2=R^2-d^2$ (*).

Возможны три случая.

1) $d<R$, тогда $R^2-d^2>0$ и уравнение (*) является уравнением радиуса $r=\sqrt{R^2-d^2}$ с центром в точке $O$ на плоскости $Oxy$.

Таким образом, в данном случае сфера и плоскость пересекается по окружности.

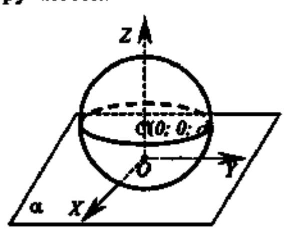


*Рис. 3*

Итак, если расстояние от центра сферы до плоскости меньше радиуса сферы, то сечение сферы плоскостью есть окружность.

2) $d=R$, тогда $R^2-d^2=0$ и уравнению (*) удовлетворяют только значения $x=0$, $y=0$. Следовательно, только координаты точки $O$ (0; 0; 0) удовлетворяют обоим уравнениям, т.е. $O$ – единственная общая точка сферы и плоскости.

Итак, если расстояние от центра сферы до плоскости равно радиусу сферы, то сфера и плоскость имеют только одну общую точку.

Этот случай рассмотрим подробнее на следующем уроке.

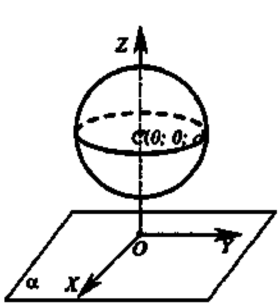


*Рис. 4*

3) $d>R$, тогда $R^2-d<0$ и уравнению (*) не удовлетворяют координаты никакой точки.

Итак, если расстояние от центра сферы до плоскости больше радиуса сферы, то сфера и плоскость не имеют общих точек.

**V. Закрепление изученного материала**

***Задача № 580.*** *Дано*: шар. $R = 41$ дм. $d = 9$ дм (рис. 5).

*Найти*: $S_{сеч.}$

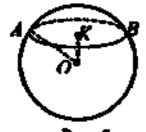


Рис. 5

*Решение*: $d < R$, значит, сечением шара плоскостью является круг. $S_{сеч.} = \pi r^2$. $\Delta AOK$ – прямоугольный, по теореме Пифагора $AK = \sqrt{AO^2 - OK^2} = \sqrt{41^2 - 9^2} = 40$ (дм). $S_{сеч.} = \pi r^2 = \pi \cdot 40^2 = 1600\pi$ (дм$^2$). (*Ответ*: $1600\pi$ дм$^2$.)

***Задача № 582.*** *Дано*: сфера, $R = 10$ см, $ABCD$ – прямоугольник, $A$, $B$, $C$, $D$ принадлежат сфере $AC = 16$ см (рис. 6).

*Найти*: $d$.

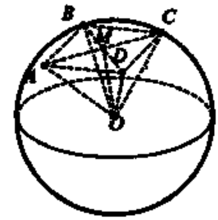


Рис. 6

*Решение*: Что называется расстоянием от точки до плоскости? Проведем перпендикуляр к плоскости прямоугольника. Обозначим $M$ – точка пересечения диагоналей прямоугольника, $O$ – центр сферы. $\Delta AOC$ – равнобедренный, значит, $OM$ – медиана и высота. $\Delta BDO$ – равнобедренный, значит, $OM$ – медиана и высота. Так как $OM \perp AC$ и $OM \perp BD$. По признаку перпендикулярности прямой и плоскости, $OM$ перпендикулярен плоскости прямоугольника. Значит, $OM$ – искомое расстояние. Из $\Delta OMA$ по теореме Пифагора $OM = \sqrt{AO^2 - AM^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$ (см). (*Ответ*: 6 см.)

***Задача № 584.*** *Дано*: сфера, $\Delta ABC$: $R = 5$ см, $AB = 13$ см, $BC = 14$ см, $CA = 15$ см (рис. 7).

*Найти*: $d$.

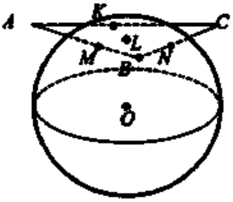


Рис. 7

*Решение*: Проведем перпендикуляр $OL$ к плоскости $\Delta ABC$. Обозначим $M$, $N$, $K$ – точки касания сторон $\Delta ABC$ со сферой. Так как эти точки лежат на сфере, то $OM = OK = ON$. $\Delta OLK = \Delta OLM = \Delta OLN$ (по гипотенузе и катету) $\Rightarrow L$ – равноудалена от сторон $\Delta ABC$, т.е. $L$ – центр вписанной окружности. Найти радиус вписанной окружности для $\Delta ABC$ $r = \dfrac{2S}{a+b+c}$, $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$,

$p = \dfrac{13+14+15}{2} = 21$ (см) $S = \sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)} = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} =$ $= \sqrt{84}$ (см$^2$). $r = \dfrac{2 \cdot 84}{13+14+15} = 4$ (см). Из прямоугольного $\Delta OLM$ найдем по теореме Пифагора $OL = \sqrt{OM^2 - r^2} = \sqrt{25-16} = 3$ (см). (*Ответ*: 3 см.)

***Задача № 586 а).*** *Дано*: $OABC$ – тетраэдр, $OH$ – высота, $R = 6$ дм, $OH = 60$ см (рис. 8).

*Выяснить*: взаимное расположение сферы радиуса $R$ с центром $O$ и плоскости $ABC$.

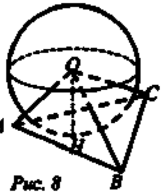



Рис. 8

*Решение*: Рассмотрим уравнение $x^2 + y^2 = R^2 - d^2$. $R = 6$ дм, $d = OH = 60$ см $= 6$ дм. $OH$ – высота тетраэдра, значит, $OH \perp (ABC)$ и $OH = d$. $R = d$. Сфера и плоскость имеют одну общую точку, т.е. они касаются.

*Дополнительные вопросы:*

1. Что называется сферой? Цилиндром сферы? Радиусом сферы? Как может быть получена сфера?
2. Что называется шаром? Как может быть получен шар?
3. Что называется уравнением поверхности?
4. Какой вид имеет уравнение сферы?
5. Каково взаимное расположение сферы и плоскости?

### VI. Подведение итогов

– Рассмотрим возможные случаи взаимного расположения сферы и плоскости. Каковы они?

– Проведено исследование взаимного расположения сферы и плоскости в зависимости от соотношения между радиусом сферы и расстоянием от ее центра до плоскости. каковы результаты этого исследования?

– В ходе сегодняшнего урока были решены несколько опорных задач, которые помогут решению домашних задач.

---

### Домашнее задание

П. 60, I уровень: № 581, 586 (б), II уровень: № 587.

***Дополнительная задача***

Диаметр шара равен 16 см. Через конец диаметра под углом 60° к нему проведено сечение шара.

*Найдите* площадь сечения.

## Урок 24. Касательная плоскость к сфере

*Цели урока*:

– рассмотреть теоремы о касательной плоскости к сфере;

– научиться решать задачи по данной теме.

## Ход урока

### I. Организационный момент

### II. Актуализация знаний учащихся

***1. Устный опрос учащихся.***

| | | |
|---|---|---|
| а) | Что называется сферой? | Поверхность, состоящая из всех точек пространства, расположенных на заданном расстоянии от данной точки, называемой центром сферы, а данное расстояние – радиусом. |

б) Что называют диаметром сферы?

Отрезок, соединяющий две точки сферы и проходящий через центр.

в) Расскажите о взаимном расположении сферы и плоскости.

Пусть $R$ – радиус, $d$ – расстояние от центра сферы до плоскости. Возможны случаи:

1. $d < R$: сфера и плоскость пересекаются по окружности;
2. $d = R$: сфера и плоскость имеют одну общую точку;
3. $d > R$: сфера и плоскость не имеют общих точек.

***2. Проверка домашнего задания:***

Ученики работают у доски:

а) вывод уравнения сферы.

*I ученик.*

Пусть точка $C(x_0; y_0; z_0)$ центр данной сферы, а точка $M(x; y; z)$ лежит на сфере (рис. 1).

1. Найдем расстояние между этими точками:

$MC = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$, но $MC$ есть радиус сферы, значит, можно записать:

$R = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$ или $R^2 = (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2$ – уравнение сферы с центром в точке $C(x_0; y_0; z_0)$.

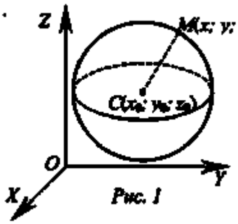


*Рис. 1*

2. Если центр сферы совпадет с началом отсчета данной системы координат, то уравнение сферы будет иметь вид: $R^2 = x^2 + y^2 + z^2$, так как $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $z_0 = 0$.

б) проверка домашних задач № 581, № 586 (б), № 587 с записью на доске.

*II ученик*

***№ 581.*** *Дано*: $\Delta ABC$, вершины $A$, $B$, $C$ лежат на сфере с центром в точке $O$. Радиус $R = 13$ см, $AB = 6$ см, $BC = 8$ см, $AC = 10$ см (рис. 2).

*Найти*: $d$ – расстояние от центра сферы до плоскости $\Delta ABC$.

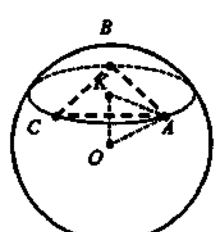


*Рис. 2*

*Решение*: Плоскость $\Delta ABC$ пересекает сферу по окружности, которая будет описанной около $\Delta ABC$. Из точки $O$ проведем $OK$ перпендикулярно плоскости $ABC$. $OK = d$ будет искомым расстоянием, а точка $K$ – центром описанной около $\Delta ABC$ окружности. Тогда отрезок $AK$ – радиус описанной около $\Delta ABC$ окружности, а $AO$ – радиус сферы.

Рассмотрим прямоугольный $\Delta OKA$: $OK = \sqrt{OA^2 - AK^2} = \sqrt{13^2 - AK^2}$ по теореме Пифагора. $AK = \dfrac{AB \cdot CB \cdot CA}{4S_{\Delta ABC}}$ – описанной окружности. $S_{\Delta ABC}=\sqrt{P(P-AB)(P-BC)(P-AC)}$ найдем площадь $\Delta ABC$ по формуле Герона. $P=\dfrac{6+8+10}{2}=12$ (см),

$S_{\Delta ABC}=\sqrt{12(12-6)(12-8)(12-10)}=\sqrt{12\cdot 6\cdot 4\cdot 2}=24$ (см$^2$),

$AK=\dfrac{6\cdot 8\cdot 10}{4\cdot 24}=5$ (см), $OK=d=\sqrt{13^2-5^2}=12$ (см). (*Ответ*: 12 см.)

*III ученик*

*№ 586 б) Дано*: $OABC$ – тетраэдр, $OH$ – высота, сфера с центром в точке $O$ и радиусом $R$; $R=3$ м, $OH=95$ см (рис. 3).

*Найти*: взаимное расположение сферы и плоскости $\Delta ABC$.

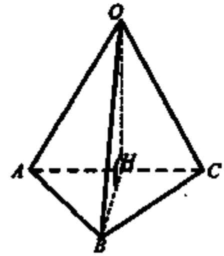


*Рис. 3*

*Решение*: Пусть $OH=d$ – расстояние от центра сферы до плоскости $\Delta ABC$. $R>d$, $R^2-d>0$. $x^2+y^2=R^2-d^2$ – уравнение окружности на плоскости $ABC$. Значит, сфера и плоскость основания тетраэдра пересекаются по окружности. (*Ответ*: сфера и плоскость пересекаются по окружности.)

*IV ученик*

*№ 587. Дано*: шар с центром в точке $O$, радиусом $R$, $d$ – расстояние от центра $O$ до секущей плоскости; а) $R=12$ см, $d=8$ см. б) $S_{сеч.}=12$ см$^2$, $d=2$ см (рис. 4).

*Найти*: а) $S_{сеч.}$; б) $R$.

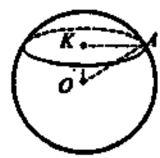


*Рис. 4*

*Решение*: а) Шар и плоскость пересекаются по окружности радиуса $R=AK=$

$=\sqrt{R^2-d^2}=\sqrt{12^2-8^2}=\sqrt{80}$ см.

В сечении получится круг площадью $S_{сеч.}=\pi r^2=\pi\cdot 80=$ $=80\pi$ (см$^2$); б) $S_{сеч.}=\pi r^2=\pi(R^2-d^2)=\pi R^2-\pi d^2$, $\pi R^2=S_{сеч.}+\pi d^2$;

$$R=\sqrt{\frac{S_{сеч.}+\pi d^2}{\pi}}=\sqrt{\frac{S_{сеч.}}{\pi}+d^2}=\sqrt{\frac{12}{\pi}+4}\ \text{(см)}.$$

(*Ответ*: $80\pi$ см$^2$, $\sqrt{\dfrac{12}{\pi}+4}$ см.)

**в) решение дополнительной задачи.**

**Диаметр шара 16 см. Через конец диаметра под углом 60° проведено сечение шара плоскостью.**

*V ученик.*

*Дано*: шар с центром в точке $O$, диаметр $d=16$ см, угол между диаметром и сечением шара плоскостью 60° (рис. 5).

*Найти*: $S_{сечения}$.

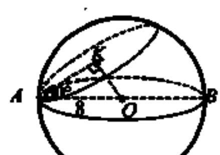


*Рис. 5*

*Решение*: Пусть $d=AB\cdot OK$ – расстояние от $O$ до плоскости. Рассмотрим $\Delta AOK$:

$AO=\dfrac{AB}{2}=\dfrac{16}{2}=8$ (см) (радиус

| | |
|---|---|
| Найдите площадь сечения. | сферы), $\angle AOK = 90°$ ($OK$ – расстояние от центра до плоскости сечения). $S_{сеч.} = \pi r^2$, где $r$ – радиус сечения, $r = AK = = \frac{1}{2} \cdot AO = \frac{1}{2} \cdot 8 = 4$ (см) как катет, лежащий против угла в 30°. $S_{сеч.} = \pi \cdot 4^2 = 16\pi$ (см$^2$). (*Ответ*: $16\pi$ см$^2$.) |

***3. Работа с чертежами.***

| | |
|---|---|
| Найдите площадь сечения плоскостью $\alpha$ шара с центром в точке $O$. | Сечение есть круг с центром в точке $A$ и радиусом $AB$. $OA \perp \alpha$. В $\Delta OAB$ $\angle A = 90°$, $r = AB = = \sqrt{41^2 - 9^2} = 40$ (см) по теореме Пифагора $S_{сеч.} = \pi r^2 = \pi \cdot 40^2 = 1600\pi$ (см$^2$) |

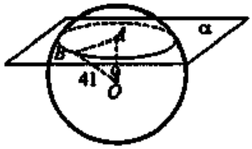


*Рис. 6*

**III. Изучение нового материала (рис. 7)**

1. Повторение изученного в курсе планиметрии:

а) Что называется касательной к окружности? Прямая, имеющая с окружностью одну общую точку.

б) Вспомним основные теоремы.

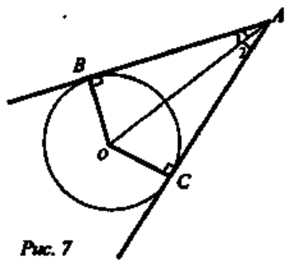


*Рис. 7*

1) Касательная к окружности перпендикулярна к радиусу, проведенному в точку касания.
2) Если прямая проходит через конец радиуса, лежащей на окружности, и перпендикулярна к этому радиусу, то она является касательной.
3) Отрезки касательных к окружности, проведенные из одной точки, равны и составляют равные углы с прямой, проходящей через эту точку и центр окружности.

2. Доказательство основных теорем о касательной плоскости.

Плоскость, имеющая со сферой только одну общую точку, называется касательной плоскостью к сфере, а их общая точка – точкой касания.

***Теорема:*** (свойство касательной плоскости)

**Радиус сферы, проведенный в точку касания сферы и плоскости, перпендикулярен к касательной плоскости.**

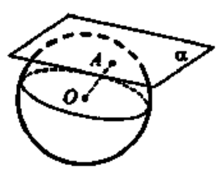


*Рис. 8*

*Дано*: сфера с центром в точке $O$ и радиусом $R$, $\alpha$ – касательная плоскость, $A$ – точка касания (рис. 8).

*Доказать*: $R \perp \alpha$.

*Доказательство*: Предположим противное: пусть $R = OA \perp \alpha$, следовательно $OA$ – наклонная к плоскости $\alpha$, значит, расстояние от центра, сферы до плоскости $\alpha$ меньше $R = OA$: $d < R$, значит, сфера и плоскость $\alpha$ пересекают по окружности, что противоречит условию, что $\alpha$ – касательная плоскость, т.е. плоскость $\alpha$ и сфера имеют одну общую точку. Значит, $R \perp \alpha$.

***Теорема***: (признак касательной плоскости)

**Если радиус сферы перпендикулярен к плоскости, проходящей через его конец, лежащий на сфере, то эта плоскость является касательной к сфере.**

*Дано*: сфера с центром в точке $O$ и радиусом $R$, $R \perp \alpha$, $OA = R$, $A$ лежит на сфере.

*Доказать*: $\alpha$ – касательная плоскость.

*Доказательство*: Радиус перпендикулярен к данной плоскости $R \perp \alpha$, значит, расстояние от центра сферы до плоскости равно радиусу сферы $d = R$, следовательно, сфера и плоскость имеют только одну общую точку, то есть данная плоскость является касательной.

### IV. Закрепление изученного материала

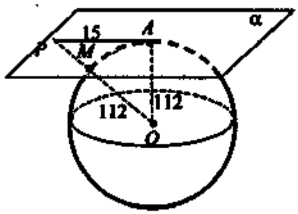



*Рис. 9*

***Задача № 592.*** *Дано*: сфера с центром в точке $O$ и радиусом $R$, $R = 112$ см, $\alpha$ – касательная, $A$ – точка касания, $P$ лежит на сфере, $AP = 15$ см. $M$ – точка пересечения $PO$ и сферы (рис. 9).

*Найти*: $PM$.

*Решение*: $\Delta OAP$ – прямоугольный, так как $OA = R$, $\alpha$ – касательная плоскость. По теореме Пифагора найдем $OP = \sqrt{112^2 + 15^2} = 13$ (см). $PM = OD - R = 113 - 112 = 1$ (см). (*Ответ*: 1 см.)

### V. Подведение итогов

1. Вспомним понятие касательной плоскости к сфере.
2. Свойство касательной плоскости.
3. Признак касательной плоскости.

---

### Домашнее задание

Пп. 58–61, вопросы 7–9 к главе VI.

***I уровень***

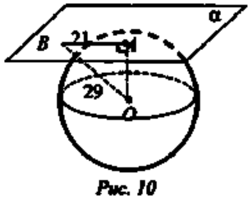



*Рис. 10*

***Задача.*** Дан шар с центром в точке $O$, $\alpha$ – касательная плоскость, точка $A$ – точка касания, точка $B$ лежит на плоскости $\alpha$, $AB = 21$ см, $BO = 29$ см (рис. 10).

Найдите радиус шара.

*Дано*: шар с центром в точке $O$, $\alpha$ – касательная плоскость, $A$ – точка касания, $OB = 29$, $AB = 21$ см.

*Найти*: $R$ шара.

*Решение*: $R = OA$, так как $A$ – точка касания, рассмотрим прямоугольный $\Delta OAB$ ($\alpha$ – касательная плоскость, $A$ – точка касания, значит $OA \perp \alpha$): по теореме Пифагора найдем $R = OA = \sqrt{OB^2 - AB^2} = \sqrt{29^2 - 21^2} = 20$ (см). (*Ответ*: 20 см.)

***II уровень***

***Задача № 591.***

Решение см. урок № 25.

## Урок 25. Площадь сферы

*Цели урока:*

– ознакомиться с формулой площади сферы;

– научиться решать задачи по данной теме.

## Ход урока

**I. Организационный момент**

**II. Актуализация знаний учащихся**

***1. Проверка домашнего задания***

а) доказательства прямой и обратной теорем о касательной плоскости; — 2 ученика доказывают у доски свойство и признак касательной плоскости к сфере.

б) решение домашних задач.

***I уровень***

(см. решение урок № 24).

***II уровень***

*Задача № 591. Дано*: сфера с центром в точке $O$ касается двугранного угла в 120°, расстояние от точки $O$ до ребра угла $a$ (рис. 1).

*Найти*: $AB$, $R$ сферы.

*Решение*: Рассмотрим сечение плоскостью, проходящей через центр шара $O$ и перпендикулярной ребру двугранного угла $MN$.

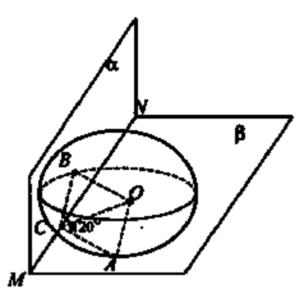



*Рис. 1*

Эта плоскость будет перпендикулярна и касательным к сфере плоскостями $\alpha$ и $\beta$. Проведем $OB \perp \alpha$, $OA \perp \beta$. $OB = OA = R$.

$OA \perp \beta$, $AC \perp MN$ по построению, $OC \perp MN$ по теореме о трех перпендикулярах. $OC = a$ – расстояние от центра сферы до ребра $MN$.

$\Delta OBC = \Delta OAC$ ($OB = OA = R$, $OC$ – общая) значит, $OC$ – биссектриса $\angle ACB = 120°$, значит, $\angle OCA = 60°$. В $\Delta OCA$: $OA = R = 0\ \sin 60° = a\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\Delta AOB$ – равнобедренный, ($OB = OA = R$) $\angle AOB = 60°$, значит, $\angle OBA = = \angle OAB = 60°$, то есть $\Delta AOB$ – равносторонний $AB = OA = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ расстояние между точками касания.

(*Ответ*: $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.)

***2. Повторение***

а) работа по карточке сфера задана уравнением: $x^2 + y^2 + z^2 + 2y - 4z = 4$. Найдите координаты центра и радиус сферы.

$x^2 + y^2 + z^2 + 2y - 4z = 4$ выделим квадрат двучлена:
$x^2 + y^2 + 2y + 1 - 1 + z^2 - 4z + 4 - 4 = 4$,
$x^2 + (y + 1)^2 + (z - 2)^2 = 9$ центр окружности $C(0; -1; 2)$, радиус $R = 3$.

б) устный опрос учащихся:

1) Что мы называем сферой? — Поверхность, состоящая из множества точек, равноудаленных от центра.

2) Что называется шаром? — Часть пространства ограниченная сферой.

3) взаимные расположения плоскости и сферы:
– нет общих точек;
– пересекаются по окружности;
– касаются (имеют одну общую точку)

4) касательная плоскость к сфере — Плоскость, имеющая со сферой только одну общую точку.

5) уравнение сферы — $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$

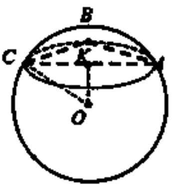


*Рис. 2*

в) работа с чертежом (устно) (рис. 2)

$AB = 6$ см, $BC = 8$ см, $AC = 10$ см.

*Найти*: $OK$.

$\Delta ABC$ прямоугольный, так как $10^2 = 8^2 + 6^2$, т.е. $\angle CBA = 90°$, значит, $\angle CBA$ опирается на диаметр сечения $CA$, тогда радиус, сечения $r = 10 : 2 = 5$ (см), $K$ – центр круга, значит, $OK = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$ (см) по теореме Пифагора.

г) рассмотрим вопросы из учебника:

**№ 7.** Точка $A$ и $B$ принадлежат шару. Принадлежит ли этому шару любая точка отрезка $AB$?

Да

**№ 8.** Могут ли все вершины прямоугольного треугольника с катетами 4 см и $2\sqrt{2}$ см лежать на сфере радиуса $\sqrt{5}$?

$\sqrt{16 + 8} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$ – диаметр сечения, на который опирается прямой угол, значит, радиус такого сечения $r = \dfrac{1}{2} \cdot 2\sqrt{6} = \sqrt{6}$, что больше радиуса сферы, таким образом, нет, не могут.

**№ 9.** Могут ли две сферы с общим центром и с неравными радиусами иметь общую касательную плоскость?

Нет.

**III. Изучение нового материала**

1) Рассмотрим рисунок 156 учебника.

Многогранник называется описанным, если сфера касается всех его граней. Сфера будет вписанной в этой многогранник.

2) Площадью сферы будем называть предел последовательности площадей поверхностей, описанных около сферы многогранников при стремлении к нулю наибольшего размера каждой грани.
$S = 4\pi R^2$.

**IV. Закрепление изученного материала**

***№ 593 а)*** $S = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot 6^2 = 144\pi$ (см$^2$)

***№ 594***

$$S_{сеч.} = \pi R^2 = 9,\ R^2 = \frac{9}{\pi}$$

$$S_{сф} = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot \frac{9}{\pi} = 36 \text{ (м}^2\text{)}$$

***№ 596*** $S_1 = 4\pi R_1^2$, $S_2 = 4\pi R_2^2$

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{4\pi R_1^2}{4\pi R_2^2};\ \ \frac{S_1}{S_2} = \frac{R_1^2}{R_2^2}$$ пропорциональны.

**V. Самостоятельная работа (обучающего характера) (10 мин)**

***I уровень***

Сечение шара площадью $S = 16\pi$ см$^2$ находится на расстоянии 3 см от центра шара.

Найдите площадь его поверхности.

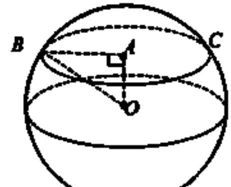


*Рис. 3*

*Дано*: шар с центром в точке $O$, $S_{сеч.} = 16\pi$ см$^2$, расстояние от точки $O$ до сечения 3 см (рис. 3).

*Найти*: $S_{сф}$.

*Решение*: $S_{сеч.} = \pi r^2 = 16\pi$, значит, $r = \sqrt{\frac{16\pi}{\pi}} = 4$ (см). Рассмотрим $\Delta OAB$ $OA = d$ – расстояние, значит, $\angle A = 90°$. $OB = R = \sqrt{16+9} = 5$ (см). $S_{сеч.} = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot 5^2 = 100\pi$ (см$^2$). (*Ответ*: $100\pi$ см$^2$.)

***II уровень***

К сфере с $S = 64\pi$ см$^2$ проведена касательная плоскость. Кротчайшее расстояние от точки $A$, лежащей в этой плоскости, до данной сферы равно 1 см.

Найти расстояние от точки $A$ до точки касания сферы с плоскостью.

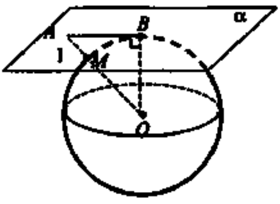



*Рис. 4*

*Дано*: сфера с центром в точке $O$, $\alpha$ – касательная плоскость, $B$ – точка касания, $A$ – точка принадлежащая плоскости $\alpha$, $AM = 1$ см $M$ – точка пересечения $AO$ и сферы (рис. 4).

*Найти*: $AB$.

*Решение*: $S_{сф.} = 4\pi R^2 = 64\pi$, $R = \sqrt{\dfrac{64\pi}{4\pi}} = 4$ (см). $B$, $M$ – точки, лежащие на сфере, значит, $OM = OB = R = 4$ см. Рассмотрим прямоугольный треугольник $OBA$ с $\angle B = 90°$ ($B$ – точка касания $OB = R$).

$BA = \sqrt{AO^2 - BO^2} = \sqrt{(4+1)^2 - 4^2} = \sqrt{25-16} = 3$ (см). (*Ответ*: 3 см.)

***III уровень***

Два взаимно перпендикулярных сечения сферы равноудалены от ее центра. При этом центр сферы находится на расстоянии $4\sqrt{2}$ см от общей хорды этих сечений, равной 6 см.

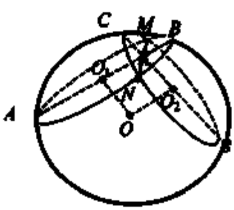



*Рис. 5*

Найдите площадь сферы.

*Дано*: сфера с центром в точке $O$, $AB \perp CD$, $AB$ – диаметр сечения, $CD$ – диаметр сечения $MN$ – общая хорда. $MN = 6$ см, $OK = 4\sqrt{2}$, $OO_1 = OO_2$ (рис. 5).

*Найти*: $S_{сф.}$

*Решение*: Рассмотрим прямоугольный $\Delta ONK$ с $\angle OKN = 90°$; $NO = R = \sqrt{3^2 + \left(4\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{9+32} = \sqrt{41}$ (см). $S_{сф.} = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot 41 = 164\pi$ (см)$^2$. (*Ответ*: $164\pi$ см$^2$.)

**VI. Подведение итогов**

Вспомним, по какой формуле вычисляется площадь сферы.

$S = 4\pi R^2$

---

**Домашнее задание**

*I уровень*. П. 60–62, № 593, 595.

***№ 593.***

б) $S = 4\pi \cdot 2^2 = 16\pi$ (дм$^2$),

в) $S = 4\pi \cdot (\sqrt{2})^2 = 8\pi$ (см$^2$), г) $S = 4\pi \cdot (2\sqrt{3})^2 = 4\pi \cdot 12 = 48\pi$ (см$^2$).

(*Ответ*: $16\pi$ дм$^2$, $8\pi$ см$^2$, $48\pi$ см$^2$.)

***№ 595.***

$S = 324$ см$^2$; $S = 4\pi R^2$; $R = \sqrt{\dfrac{324}{4\pi}} = \sqrt{\dfrac{81}{\pi}} = \dfrac{9\sqrt{\pi}}{\pi}$ (см). (*Ответ*: $\dfrac{9\sqrt{\pi}}{\pi}$ см.)

*II уровень.* № 598, 597, 600.

***№ 597.*** $S_{сф.}=4\pi R^2$, $R=5$ см, $S_{сф.}=4\pi\cdot 5^2=100\pi$ (м$^2$), $S_{кр.}=\pi L^2$, $L$ – радиус круга $\pi L^2=\pi\cdot 100$, $L^2=100$, $L=10$ (м). (*Ответ*: 10 м.)

***№ 598.*** *Дано*: сфера с центром в точке $O$ и радиусом $R$; $r_1$, $r_2$ – радиусы параллельных сечений сферы, $r_1=9$ см, $r_2=12$ см, $l=3$ см – расстояние между секущими плоскостями (рис. 6).

*Найти*: $S_{сф.}$

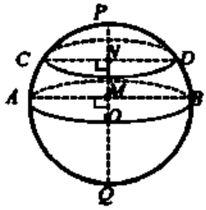



*Рис. 6*

*Решение*: Проведем диаметры перпендикулярно к данным параллельным сечениям. Через диаметр проведем секущую плоскость, которая пересечет сферу по окружности, радиус которой равен радиусу сферы $ND=r_1=9$ см, $MB=r_2=12$ см, $NM=3$ см, $OD=OB=R$ в $\Delta OBM: OM=\sqrt{R^2-12^2}=\sqrt{R^2-144}$ в $\Delta ODN: ON=\sqrt{R^2-9^2}=\sqrt{R^2-81}$. $MN=NO-MO=$
$=\sqrt{R^2-81}-\sqrt{R^2-144}$; $\sqrt{R^2-81}-\sqrt{R^2-144}=\sqrt{R^2-81}=3+\sqrt{R^2-144}$,
$R^2-81=9+6\sqrt{R^2-144}+R^2-144$, $6\sqrt{R^2-144}=54$, $\sqrt{R^2-144}=9$,
$R^2-144=81$, $R^2=225$, $R=15$ (см). $S_{сф.}=4\pi R^2=4\pi\cdot 15^2=4\pi\cdot 225=$
$=900\pi$ (см$^2$). (*Ответ*: $900\pi$ см$^2$.)

***№ 600.***

Цилиндр получен путем вращения квадрата $ABCD$ вокруг стороны $AB=a$. $S_{сф.}=4\pi a^2$, $S_{осн.}=\pi a^2$, $S_{бок.}=2\pi\cdot AD\cdot AB=2\pi\cdot a\cdot a=2\pi a^2$, $S_{полн.}=$
$=2S_{осн.}+S_{бок.}=2\pi a^2+2\pi a^2=4\pi a^2$. Следовательно, $S_{полн.цил.}=S_{сф.}$

## Урок 26. Разные задачи на многогранники, цилиндр, конус и шар

*Цели урока:*

– ввести понятие вписанного шара (сфера) в многогранник, описанного шара (сферы) около многогранника, выяснить условия их существования;
– научить учащихся применять введенные понятия при решении задач на комбинацию: сферы и пирамиды; цилиндра и призмы.

### Ход урока

**I. Организационный момент**

Постановка целей и задач урока.

**II. Актуализация знаний**

Новые понятия, определения вписанного (описанного) шара (сферы) можно вводить по аналогии с вписанным (описанным) многоугольником.

- Какой многоугольник называется вписанным в окружность?
- Всякий ли треугольник можно вписать в окружность?
- Где находится центр окружности, описанной около треугольника?
- Где будет находится эта точка (центр окружности) в остроугольном, прямоугольном, тупоугольном треугольнике? (Внутри треугольника, на середине гипотенузы, вне треугольника).
- Какие мы знаки формулы для нахождения $R$? $\left(R=\dfrac{a}{2\sin\alpha}, R=\dfrac{abc}{4S}\right)$.
- Всякий ли четырехугольник можно вписать в окружность? (Нет).
- Каким свойством обладает четырехугольник, вписанный в окружность? (Сумма противолежащих углов равна 180°).
- Какой многоугольник называется описанным около окружности?
- Где находится центр окружности вписанной в треугольник?
- Каким свойством обладает четырехугольник, описанный около окружности? (Сумма длин противолежащих сторон равна).

**III. Изучение нового материала**

Рассмотрим последовательность изложения теории по заданной теме.

1. Положение общих терминов, которые встречаются в задачах: многогранник, описанный около сферы; сфера, вписанная в многогранник; многогранник вписанный в сферу; сфера описанная около многогранника. (См. учебник с. 138).

Рассмотрение рисунков № 157 (а, б) и 158 а, б) на с. 139 учебника.

2. Теория на комбинацию сферы и пирамиды.
   а) Шар вписанный в пирамиду.
      - В любую треугольную пирамиду можно вписать шар.
      - В пирамиду, у которой в основание можно вписать окружность, центр которой служит основанием высоты пирамиды, можно вписать шар.
      - В любую правильную пирамиду можно вписать шар.
      - Центр шара, вписанного в пирамиду, есть точка пересечения высоты пирамиды с биссектрисой угла, образованного апофемой и ее проекцией на основание.
      - Центр (сферы) шара, вписанного в правильную пирамиду, лежит на высоте этой пирамиды.

Решить задачу № 633. Возьмем треугольную пирамиду.

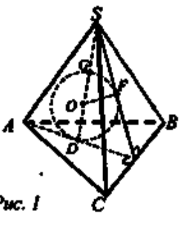


Рис. 1

*Дано*: $SABC$ – правильная пирамида; $SD$ – высота пирамиды, сфера $(O; R)$ (рис. 1).

*Доказать*: $O \in SD$.

*Доказательство*: Проведем $AE \perp BC$, отрезок $SE$. По теореме о трех перпендикулярах $SE \perp CB$. Впишем в $\Delta SDE$ полуокружность $DFG$, центр $O$ которой лежит на катете $SD$, а дуга касается сторон $DE$ и $SE$.

$\Delta SED$ вместе с полуокружностью $DFG$ будем поворачивать вокруг $SD$. Тогда катет $DE$ опишет окружность, вписанную в $\Delta ABC$, поэтому гипотенуза $SE$ при вращении остается внутри пирамиды, за исключением трех положений, когда $SE$ будет совпадать с высотой боковых граней. Вывод: сфера, образованная вращением полуокружности $DFG$, будет иметь единственную общую точку с каждой из боковых граней. Эта сфера касается и основания пирамиды в точке $D$. Тогда центр вписанной в пирамиду $SABC$ сферы $(O; R)$ лежит на высоте $SD$.

б) Описанный шар около пирамиды.

- Около любой треугольной пирамиды можно описать шар.
- Если около основания пирамиды можно описать окружность, то около пирамиды можно описать шар.
- Около любой правильной пирамиды можно описать шар.
- Центр шара, описанного около пирамиды, лежит в точке пересечения прямой перпендикулярной основанию пирамиды, проходящей через центр описанной около основания окружности и плоскости, перпендикулярной любому боковому ребру, проведенной через середину этого ребра.

Решить задачу № 639, в).

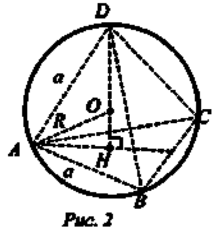


Рис. 2

*Дано*: сфера $(O; R)$, $DABC$ – правильный тетраэдр. $DH$ – высота тетраэдра; $R$ – радиус сферы (рис. 2).

*Найти*: $S$ полной поверхности тетраэдра.

*Решение*: Примем ребро тетраэдра равно $a$. Центр $O$ описанной сферы лежит на высоте $DH$, точка $H$ – центр $\Delta ABC$, поэтому $HA=\dfrac{a}{\sqrt{3}}$. Из прямоугольного $\Delta ADH$ (рис. 3): $DH=\sqrt{a^2-HA^2}=a\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$. $\cos\alpha=\dfrac{DH}{AD}=\sqrt{\dfrac{2}{3}}$, где $\alpha=\angle ADH$. Из $\Delta AOD$ по теореме косинусов: $a^2=2R^2-2R^2\cos(180^\circ-2\alpha)=2R^2+$ $+2R^2\cos2\alpha=2R^2(1+2\cos^2\alpha-1)=4R^2\cos^2\alpha=\dfrac{8}{3}R^2$.

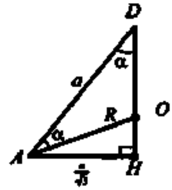


Рис. 3

Площадь одной грани тетраэдра равна $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$; все грани – равносторонние треугольники, поэтому $S_{\text{п.п.}}=4\cdot\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}=a^2\sqrt{3}=\dfrac{8}{3}R^2\cdot\sqrt{3}=\dfrac{8\sqrt{3}R^2}{3}$.

(*Ответ*: $\dfrac{8\sqrt{3}}{3}R^2$.)

### IV. Решение задач

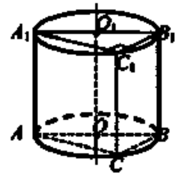


*Рис. 4*

*Задача № 629. Дано*: цилиндр, $OO_1$ – ось цилиндра; $ABCA_1B_1C_1$ – вписанная призма, $OO_1 \in (AA_1B_1B)$ (рис. 4).

*Доказать*: $\angle((ACC_1), (BCC_1)) = 90°$.

*Доказательство*: В окружности основания $AB$ – диаметр, $\angle ACB$ – вписанный, опирающийся на диаметр, значит, $\angle ACB = 90°$. $BC \perp CC_1$, образующая $CC_1$ перпендикулярна основанию; $BC \perp (ACC_1)$. По признаку перпендикулярности двух плоскостей (п. 23) плоскость $AA_1C_1C$ перпендикулярна плоскости $BCC_1B_1$.

*Задача № 363. Дано*: $FDCDA_1B_1C_1D_1$ – правильная усеченная пирамида, $OO_1$ – высота, $KN$ – апофема; сфера $(S; R)$ (рис. 5).

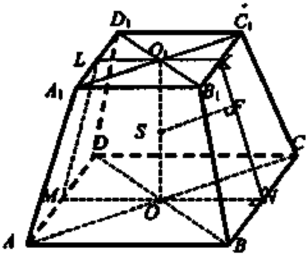


*Рис. 5*

*Доказать*: $KN = \dfrac{B_1C_1 + BC}{2}$.

*Доказательство*: Боковые грани – равнобедренные трапеции; высоты этих трапеций называются апофемами. В правильной усеченной пирамиде центр вписанной сферы находится в середине $OO_1$, где $O$ и $O_1$ – центры оснований. Это утверждение вытекает из вывода задачи № 633, центр сферы, вписанной в правильную пирамиду, лежит на высоте.

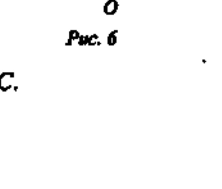


*Рис. 6*

Из планиметрии: в описанном четырехугольнике суммы противоположных сторон равны (рис. 6).

$ML + KN = LK + MN$; $2KN = LK + MN$

$KN = \dfrac{LK + MN}{2} = \dfrac{B_1C_1 + BC}{2}$, в основаниях квадраты, $LK = A_1B_1 = B_1C_1$ и $MN = AB = BC$.

$KN = \dfrac{B_1C_1 + BC}{2}$. Доказано.

### V. Подведение итогов

Цель урока достигнута. Применили знания, полученные при изучении темы «Вписанные и описанные сферы в многогранник» при решении задач.

---

**Домашнее задание**

№ 635, 637. Стр. 138–139.

Доп. II уровень. Вычислите поверхность шара, вписанного в треугольную пирамиду, все ребра которой равны $a$.

*Решение*: Проведем плоскость через $SO$ и $SD$. Радиус круга в полученном сечении равен радиусу шара. Так как все ребра пирамиды равны $a$, то

$SD = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $OD = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$. Из $\Delta SOD$, $\angle O = 90°$, $SO = \sqrt{SD^2 - OD^2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. Обозначим радиус шара через $R$, тогда $SO_1 = SO - R$. В $\Delta SKO_1$ имеем $O_1K^2 = SO_1^2 - SK^2$ или $R^2 = (SO - R)^2 - \dfrac{a^2}{3}$.

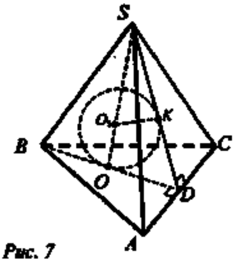


Рис. 7

$$r^2 = \frac{2a^2}{3} - \frac{2ar\sqrt{6}}{3} + r^2 - \frac{a^2}{3}, \quad \text{т.е.} \quad r = \frac{a}{2\sqrt{6}}.$$

$S_{шара} = 4\pi R^2 = \dfrac{\pi a^2}{6}$. (*Ответ*: $\dfrac{\pi a^2}{6}$.)

## Урок 27. Разные задачи на многогранники, цилиндр, конус и шар

*Цели урока:*

– закрепить основные понятия по изученной теме;

– совершенствовать навык решения задач на комбинацию: призмы и сферы; конуса и пирамиды.

### Ход урока

**I. Проверка домашнего задания**

Два ученика у доски показывают решение № 635 (а) и № 637 (а).

В целях экономии времени рекомендуется подготовить чертеж, краткое решение и основную идею доказательства.

За время подготовки учащихся провести фронтальный опрос класса по вопросам:

– Какой многогранник называется вписанным в сферу?

– Какая сфера называется вписанной в многогранник?

– Какой многогранник называется описанным около сферы?

– Какая сфера называется описанной около многогранника?

– Где находится центр шара, вписанного в пирамиду?

*Задача № 635 а). Дано*: $S_{ABCD}$ – правильная пирамида, $\angle ASD = \alpha$; сфера $(O_1; R)$ вписанная в пирамиду (рис. 1).

*Найти*: $S_{бок.}$ – ?

*Решение*: Пусть сторона основания $AB = AD = a$, высота боковой грани $SK = h_a$ – апофема.

1. $S_{бок.} = \dfrac{1}{2} P_{осн.} \cdot h_a = \dfrac{1}{2} \cdot 4a \cdot h_a = 2a \cdot h_a$.

2. $\Delta SO_1E \propto \Delta SKO$ (по 2 углам) $\dfrac{SO_1}{SK} = = \dfrac{O_1E}{KO} = \dfrac{SE}{SO}$.

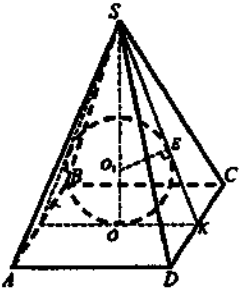



*Рис. 1*

3. $OK = \dfrac{a}{2}$; $SK = \dfrac{a}{2}\operatorname{ctg}\dfrac{a}{2}$; $SO = \dfrac{a\sqrt{\cos\alpha}}{2\sin\dfrac{\alpha}{2}}$;

$$SO_1 = \frac{a\sqrt{\cos\alpha}}{2\sin\dfrac{\alpha}{2}} - R; \qquad a = 2R\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}};$$

$$h_a = SK = R\cdot\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}. \quad S_{бок.} = 2\cdot 2R$$

$$\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}}\cdot R\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = 4R^2\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha\cdot\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}.$$

(*Ответ*: $4R^2\dfrac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha\cdot\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}$.)

***Задача № 637 а). Дано***: $RPQR_1P_1Q_1$ – правильная призма, $AB$ – высота; сфера $(O; R)$, описанная около призмы (рис. 2).

*Доказать*: $AO = OB$; $R = OP = OP_1$.

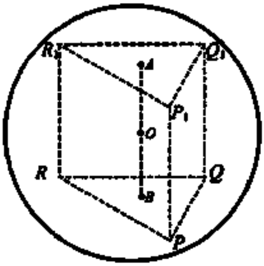



*Рис. 2*

*Доказательство*: В основаниях призмы лежат равные равносторонние треугольники. Примем $A$ и $B$ центры оснований. Все точки, лежащие на перпендикуляре к верхнему основанию призмы, проведенном через точку $A$, равноудалены от вершин $\Delta P_1Q_1R_1$. Аналогично с нижним основанием. Т.к. призма правильная, то $\Delta P_1Q_1R_1$ и $\Delta PQR$ проектируется один на другой, поэтому точки $B$ и $A$ проектируются друг в друга. Значит, $AB$ перпендикуляр к плоскостям оснований призмы. Отрезок $AB$ есть геометрическое место точек, равноудаленных от вершин $\Delta P_1Q_1R_1$ и $\Delta PQR$, середина $AB$ – точка $O$ равноудалена от вершин треугольников на расстоянии $R$, равны радиусу описанной около призмы сферы.

Так как $AO = OB$ и $OP = OP_1 = R$.

## II. Актуализация опорных знаний

– Какая призма называется вписанной в сферу?

– Какая призма называется описанной около сферы?

– Какая призма называется правильной?

– Около всякого ли прямоугольника можно описать окружность?

– Где находится центр этой окружности?

– Во всякий ли прямоугольник можно вписать окружность?

– А в какой можно?

**III. Решение задач**

1. Теория на комбинацию: призма и шар.
   а) Шар, вписанный в призму.
   - Шар можно вписать в прямую призму, если в основание призмы можно вписать окружность, а высота призмы равна диаметру этой окружности.
   - Центр вписанного шара лежит на середине высоты прямой призмы, проходящей через центры окружностей вписанных в основания призмы, а радиус шара равен радиусу окружности, вписанной в основание призмы.

   б) Шар, описанный около призмы.
   - Около призмы можно описать шар тогда и только тогда, когда призма прямая и около основания можно описать окружность.
   - Центр шара, описанного около прямой призмы, лежит на середине высоты призмы, проведенной через центр окружности, описанной около основания.

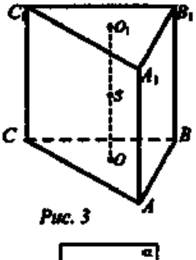


*Рис. 3*

2. ***Задача № 632.***

*Дано*: $ABCA_1B_1C_1$ – правильная призма, $O$ и $O_1$ – центры оснований призмы; сфера $(S; R)$ вписанная в призму (рис. 3).

*Доказать*: $OS = SO_1$.

*Доказательство*: Сфера касается всех граней призмы, центр ее должен быть равноудален от оснований, т.е. лежать на середине высоты призмы. Отрезок $OO_1$, соединяющий центры оснований, является высотой призмы и все точки, лежащие на отрезке $OO_1$, равноудалены от боковых граней призмы. ($O$ и $O_1$ – центры вписанных в основания окружностей.) Таким образом, середина $O_1O$, точка $S$, является центром сферы.

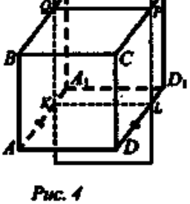
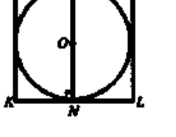


*Рис. 4*

***Задача № 634 а).*** *Дано*: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб, сфера $(O; R)$ вписанная в куб (рис. 4).

*Найти*: $S$ полной поверхности куба.

*Решение*: Рассмотрим сечение $KLPQ$, где $K$, $L$, $P$, $Q$ – середины $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$ и $DD_1$ соответственно. В сечении получим квадрат и вписанную в него окружность, ее радиус равен радиусу сферы. Пусть ребро куба равно $a$, $a = 2R$. Площадь одной грани равна $a^2$ или $4R^2$. $S_{п.п.} = 6 \cdot 4R^2 = 24R^2$. (*Ответ*: $24R^2$.)




***Задача № 639 б).*** *Дано*: Вписанная правильная шестиугольная призма, $H_1H_2 = R$ высота призмы; сфера $(O; R)$ (рис. 5).

*Найти*: $S$ полной поверхности призмы.

*Решение*: $H_1$ и $H_2$ – центр оснований призмы.

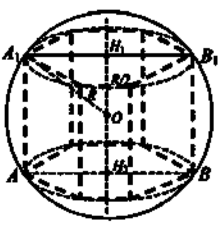



*Рис. 5*

Рассмотрим сечение призмы плоскостью, проходящей через диаметр оснований призмы перпендикулярного основаниям призмы. Получим прямоугольник $AA_1B_1B$. Из прямоугольного $\Delta OA_1H_1$: $A_1H_1 = \sqrt{R^2 - \left(\frac{R}{2}\right)^2} = \frac{R\sqrt{3}}{2}$ (по теореме Пифагора). $A_1H_1$ – радиус описанной окружности около основания призмы, а в правильном шестиугольнике его сторона равна радиусу описанной около него окружности. Сторона основания $a$. $a = \frac{R\sqrt{3}}{2}$, площадь грани $R \cdot a = \frac{R^2\sqrt{3}}{2}$. $S_{бок.} = 6 \cdot \frac{R^2\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}R^2$. $S_{осн.} = \frac{3\sqrt{3}a^2}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \left(\frac{R\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3\sqrt{3} \cdot 3R^2}{8} = \frac{9\sqrt{3}R^2}{8}$,

$S_{п.п.} = 2S_{осн.} + S_{бок.}$. $S_{п.п.} = 2 \cdot \frac{9\sqrt{3}R^2}{8} + 3\sqrt{3}R^2 = \frac{9\sqrt{3}R^2}{4} + \frac{12\sqrt{3}R^2}{4} = \frac{21\sqrt{3}R^2}{4}$.

(*Ответ*: $\frac{21\sqrt{3}R^2}{4}$.)

***Задача № 630.*** *Дано*: конус, $SO$ – высота; $SABCD$ – пирамида, вписанная в конус, $ABCD$ – прямоугольник; $SO = 12$ см, $AB = 8$ см, $BC = 6$ см (рис. 6).

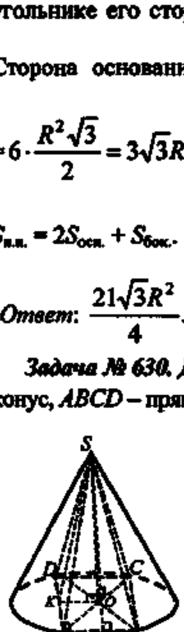



*Рис. 6*

*Найти*: $\frac{S_{пирамиды}}{S_{конуса}}$.

*Решение*: $SO \perp (ABCD)$, $OA = OB = r$. Ребра пирамиды равны образующим конуса и лежат на поверхности конуса. $BD = 2r$, $BD = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$ (см) $r = \frac{BD}{2} = \frac{10}{2} = 5$ (см). Найдем площадь полной поверхности конуса. $S_{осн.} = \pi r^2 = 25\pi$ (см²). Из прямоугольного $\Delta SOA$: $SA = \sqrt{SO^2 + OA^2} = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$ (см). $S_{бок.} = \pi rl$, $l = SA$, $S_{бок.} = \pi \cdot 5 \cdot 13 = 65\pi$ (см²). $S_{пол.пов.} = S_{осн.} + S_{бок.} = (25 + 65)\pi = 90\pi$ (см²). $S_{ABCD} = AB \cdot BC = 6 \cdot 8 = 48$ (см²). Боковые грани попарно равны. Проведем $OK \perp DA$, $OL \perp AB$, отрезки $SK$ и $SL$. По теореме о трех перпендикулярах $SK \perp DA$ и $SL \perp AB$. $OK = \frac{1}{2}AB = 4$ (см). $OL = \frac{1}{2}BC = 3$ (см). Из $\Delta SOK : SK = \sqrt{SO^2 + OK^2} = \sqrt{12^2 + 4^2} = 4\sqrt{10}$ (см); $S_{\Delta ACD} = \frac{1}{2}SK \cdot DA = 12\sqrt{10}$ (см²). Из $\Delta SOL$: $SL = \sqrt{SO^2 + OL^2} = \sqrt{12^2 + 3^2} = 3\sqrt{17}$ (см); $S_{\Delta ACB} = \frac{1}{2}SL \cdot AB = 12\sqrt{17}$ (см²).

$S_{бок.} = 2(S_{\Delta ACD} + S_{\Delta ACB}) = 2 \cdot 12(\sqrt{10}+\sqrt{17}) = 24(\sqrt{10}+\sqrt{17})$ (см$^2$). $S_{п.п.} =$

$= S_{осн.} + S_{бок.} = 24(\sqrt{10}+\sqrt{17}) + 48 = 24(\sqrt{10}+\sqrt{17}+2)$ (см$^2$). $\dfrac{S_{шар.}}{S_{кон.}} =$

$= \dfrac{24(\sqrt{10}+\sqrt{17}+2)}{90\pi} = \dfrac{4(\sqrt{10}+\sqrt{17}+2)}{15\pi}$. (*Ответ*: $\dfrac{4\sqrt{10}+4\sqrt{17}+8}{15\pi}$.)

**IV. Подведение итогов**

Проводится закрепление умения решать задачи по теме урока.

---

**Домашнее задание**

Подготовить теорию по изученной теме, № 634 б) и № 639 а).

## Урок 28. Разные задачи на многогранники, цилиндр, конус и шар

*Цели урока:*

- закрепление знаний, умений и навыков учащихся по изученной теме, устранение пробелов в знаниях;
- совершенствование навыков решения задач по изученной теме.

### Ход урока

**I. Организационный момент**

Учащимся сообщается тема урока.

Формулируются цели урока, виды деятельности учащихся для достижения целей.

**II. Тест** (см. приложение)

Тест на закрепление теоретических знаний с последующей самопроверкой и обсуждением тех заданий, по которым допущено наибольшие число ошибок.

Учащиеся работают в тетрадях, ответы выписывают на листочках, которые по окончанию работы сдают учителю на проверку. Самопроверка осуществляется по записям в тетрадях.

Учащиеся должны закончить предложенную им фразу, формулирующую понятие.

***Ключи к тесту.***

Учитель называет правильные ответы, учащиеся сами проверяют свои ответы. Проводится анализ ошибок.

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| Вариант I | б | а | б | а | в |
| Вариант II | а | б | б | в | в |

## III. Решение задач

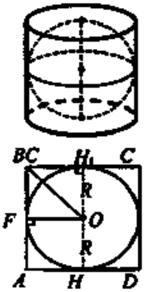



*Рис. 1*

***№ 642.*** По условию задачи используется рис. 157, а) из учебника, предложим решение (рис. 1).

*Решение*: Рассмотрим осевое сечение. Во всякий цилиндр можно вписать сферу, если его осевое сечение – квадрат. $R$ – радиус сферы, $ABCD$ – квадрат. $BH_1 = OH_1 = R$, $BH_1$ – радиус основания цилиндра, $HH_1 = 2R$ – высота цилиндра. $S_{п.п.} = S_{бок.} + 2S_{осн.}$; $S_{бок.} = 2BH_1 \cdot HH_1 = 2\pi R \cdot 2R = 4\pi R^2$, $S_{осн.} = \pi \cdot BH_1^2 = \pi R^2$; $S_{п.п.} = 4\pi R^2 + 2\pi R^2 = 6\pi R^2$; $S_{сферы} = 4\pi R^2$. $\dfrac{S_{сф.}}{S_{п.п.}} = \dfrac{4\pi R^2}{6\pi R^2} = \dfrac{2}{3}$. (*Ответ*: $\dfrac{2}{3}$.)

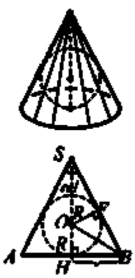



*Рис. 2*

***№ 643 а).*** По условию задачи используется рис. 157б) из учебника, для решения рассмотрим осевое сечение (рис. 2).

*Решение*: Высота $SH$ делит осевое сечение на два равных треугольника: $SH$ – биссектриса угла $\varphi$. В $\Delta HBS$: $\angle HBC = 90° - \dfrac{\varphi}{2}$ $OB$ – биссектриса $\angle HBS$; $\angle HBO = \dfrac{\angle HBS}{2}$.

Из прямоугольного $\Delta OHB$: $\dfrac{R}{r} = \operatorname{tg}\angle HBO = \operatorname{tg}(45° - \dfrac{\varphi}{2})$,

$$r = \frac{R}{\operatorname{tg}(45° - \frac{\varphi}{2})} = \frac{R}{\operatorname{ctg}(90° - (45° - \frac{\varphi}{2}))} = \frac{R}{\operatorname{ctg}(45° + \frac{\varphi}{4})} =$$

$= R\operatorname{tg}(45° + \dfrac{\varphi}{4})$. (*Ответ*: $R \cdot \operatorname{tg}(45° + \dfrac{\varphi}{4})$.)

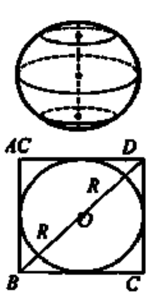



*Рис. 3*

***№ 645.*** По условию задачи используется рис. 158 а) из учебника, для решения рассмотрим осевое сечение (рис. 3).

*Решение*: Около любого цилиндра можно описать сферу. Основание цилиндра является сечениями сферы. Высота цилиндра равна его образующей, а так как образующая равна диаметру основания, то $ABCD$ – квадрат. Примем $AD = a$, радиус сферы равен $R$. Из $\Delta ADB$: $BD^2 = (2R)^2 = a^2 + a^2$; $2R = a\sqrt{2}$; $R = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. $S_{сферы} = 4\pi R^2 = 2\pi a^2$. Радиус основания цилиндра $\dfrac{a}{2}$. $S_{бок.} = 2\pi \cdot \dfrac{a}{2} \cdot a = \pi a^2$; $S_{осн.} = \pi\left(\dfrac{a}{2}\right)^2 = \dfrac{\pi a^2}{4}$; $S_{п.п.} = S_{бок.} + 2S_{осн.} = \pi a^2 + 2 \cdot \dfrac{\pi a^2}{4} = \dfrac{3a^2\pi}{2}$. $\dfrac{S_{п.п.}}{S_{сф.}} = \dfrac{3/2\,\pi a^2}{2\pi a^2} = \dfrac{3}{4}$. (*Ответ*: $\dfrac{3}{4}$.)

## IV. Подведение итогов

– На последних трех уроках были разобраны задачи на комбинации: сфера и пирамида; сфера и призма; сфера и цилиндр; сфера и конус; цилиндр и призма; конус и пирамида.

– В ходе занятий мы выяснили: всегда ли существует вписанная в многогранник и описанная около многогранника сфера, где находится центр этой сферы.

**Домашнее задание**

Гл. VI, подготовиться к контрольной работе. Номера: 522, 551 *в*), 589 *а*).

Ответы к домашним номерам: 2) $S_\Delta = \sqrt{3}R^2$ (кв. ед.), если $\angle\alpha = 60°$;

1) $S_{осн.} = \pi R^2 = \pi(12\sqrt{3})^2 = \pi \cdot 144 \cdot 3 = 432\pi$ (см²);

3) $L = 2\pi r = 2\pi \cdot \dfrac{R\sqrt{3}}{2} = \pi\sqrt{3}R = 2\sqrt{3}\pi$ (см), если $R = 2$ см, $\alpha = 30°$.

## Урок 29. Зачет по теме: «Тела вращения»

*Цель:*

– проверка знаний, умений и навыков учащихся при решении задач по теме «Фигуры вращения».

***Задачи к зачету*** (см. приложение)

***Ответы:***

| Уровень | Вариант | № задачи | Ответ |
|---|---|---|---|
| I уровень | *Вариант I* | 1 | 36 см² |
| | | 2 | $64\pi$ см² |
| | | 3 | 5 м; 12 м |
| | *Вариант II* | 1 | 3 дм |
| | | 2 | $18\pi$ см |
| | | 3 | $0{,}5\,\ell$; $0{,}25\,\ell^2\sqrt{3}$ |

| Уровень | Вариант | № задачи | Ответ |
|---|---|---|---|
| II уровень | *Вариант I* | 1 | $8\pi$ см² |
| | | 2 | $36\sqrt{2}\,\pi$ см², 72 см² |
| | | 3 | $\frac{1}{8}\pi d^2$ см² |
| | *Вариант II* | 1 | $64\pi$ см² |
| | | 2 | $36\sqrt{2}\pi$ см² |
| | | 3 | 20 см |

| Уровень | Вариант | № задачи | Ответ |
|---|---|---|---|
| III уровень | *Вариант I* | 1 | 10 см |
| | | 2 | $\frac{25\sqrt{10}\pi}{4}$ см² |
| | | 3 | $\frac{1}{2} b \operatorname{tg}\alpha \operatorname{ctg}\beta/2$. |

| Уровень | Вариант | № задачи | Ответ |
|---|---|---|---|
| | *Вариант II* | 1 | $\frac{\pi d\sqrt{3}}{2}$ см |
| | | 2 | $24\sqrt{73}\,\pi$ см$^2$ |
| | | 3 | $\frac{2}{3}r^2\sqrt{2}$ кв. ед. |

**II. Домашнее задание**

I уровень – № 601, 594; II уровень – № 613; 622.

***Решение задач из карточек контрольной работы***

***II уровень***

***Вариант I***

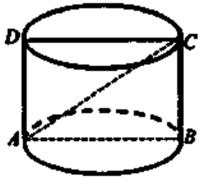


*Рис. 1*

***№ 1.*** *Дано*: цилиндр; $ABCD$ – квадрат; $AC = 4$ см (рис. 1).

*Найти*: $S_{б.п.ц.}$

*Решение*: $S_{б.п.ц.} = 2\pi RH$. Пусть $AB = x$, тогда $x^2 + x^2 = 4^2$; $2x^2 = 16$; $x^2 = 8$; $x = 2\sqrt{2}$. $R = \sqrt{2}$; $H = 2\sqrt{2}$. $S_{б.п.ц.} = 2\pi \cdot \sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} = 8\pi$ (см$^2$). (*Ответ*: $8\pi$ см$^2$.)

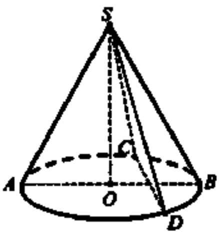


*Рис. 2*

***№ 2.*** *Дано*: конус; $AO = OB = 6$ см; $\angle SBO = 60°$; $\angle CSD = 45°$ (рис. 2).

*Найти*: а) $S_{сеч.}$; б) $S_{б.п.конуса}$.

*Решение*: Так как $\angle SBO = 60°$, то $\angle OSB = 30° \Rightarrow OB = \frac{1}{2}BS$; $BS = 12$ см, т. е. $\ell = 12$ см.

а) $S_{сеч.} = \frac{1}{2}\ell^2 \sin 45° = \frac{1}{2} \cdot 144 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 36\sqrt{2}\,\pi$;

б) $S_{б.п.кон.} = \pi R\ell = \pi \cdot 6 \cdot 12 = 72\pi$ (см$^2$).

(*Ответ*: а) $36\sqrt{2}\,\pi$см$^2$; б) $72\pi$ см$^2$.

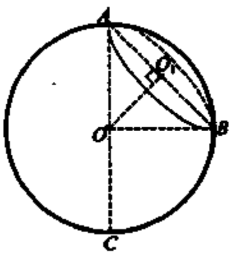


*Рис. 3*

***№ 3.*** *Дано*: шар, $AC = d$; $\angle BAO = 45°$ (рис. 3).

*Найти*: $S_{сеч.}$

*Решение*: $AO = OB = \frac{d}{2}$. Из $\Delta OO_1A$ имеем $AO_1 = OO_1 = x$, так как $\angle O_1AO = 45°$, тогда и $\angle O_1OA = 45°$. $x^2 + x^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2$; $2x^2 = \frac{d^2}{4}$; $x^2 = \frac{d^2}{8}$;

$x^2 = AO_1^2 = r^2$. $S_{сеч.} = \pi r^2 = \pi\frac{d^2}{8} = \frac{1}{8}\pi d^2$ (кв. ед.). (*Ответ*: $\frac{1}{8}\pi d^2$ кв. ед.)

***Вариант II***

***№ 1. Дано***: цилиндр, $ABCD$ – квадрат; $S_{\text{осн.ц.}} = 16\pi$ см$^2$ (рис. 4).

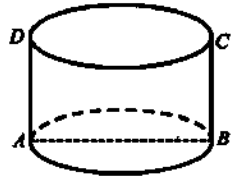


Рис. 4

***Найти***: $S_{\text{б.п.ц.}}$

***Решение***: $\pi R^2 = 16\pi$; $R^2 = 16$; $R = 4$. $AB = BC = 4 \cdot 2 = 8$ (см). $S_{\text{б.п.ц.}} = 2\pi RH$, где $R = 4$; $H = 8$. $S_{\text{б.п.ц.}} = 2\pi \cdot 4 \cdot 8 = 64\pi$ (см$^2$). (*Ответ*: $64\pi$ см$^2$.)

***№ 2. Дано***: конус; $SO = 6$ см; $\angle ASB = 90°$; $\angle CSD = 35°$(рис. 5).

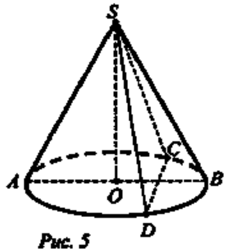


Рис. 5

***Найти***: $S_{\text{б.п.конуса}}$

***Решение***: В $\Delta ASB$, $SO$ – высота и биссектриса, тогда $\angle ASO = 45° \Rightarrow AO = SO$. $R = H = 6$ см. $\ell = 6\sqrt{2}$.

$S_{\text{б.п.кон.}} = \pi R\ell = \pi \cdot 6 \cdot 6\sqrt{2} = 36\sqrt{2}\,\pi$ (см$^2$).

(*Ответ*: $36\sqrt{2}\,\pi$ см$^2$.)

***№ 3. Дано***: шар, $\angle BAO = 30°$; $S_{\text{сеч.}} = 75\pi$ см$^2$ (рис. 6).

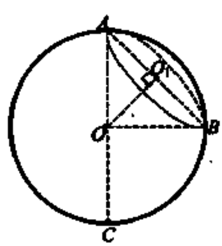


Рис. 6

***Найти***: $AC$.

***Решение***: $S_{\text{сеч.}} = \pi r^2$; $75\pi = \pi r^2$; $r^2 = 75$; $r = 5\sqrt{3}$. $AO_1 = 5\sqrt{3}$. Из $\Delta AO_1O$: $\cos 30° = \dfrac{AO_1}{AO}$; $AO = \dfrac{5\sqrt{3}}{\sqrt{3}/2} = 10$ (см). $AC = 2 \cdot AO = 2 \cdot 10 = 20$ (см).

(*Ответ*: 20 см.)

### *III уровень*

***Вариант I***

***№ 1. Дано***: шар; $C_{\text{окр.сеч.}} = 5\pi$ см; $\angle BAO = 60°$ (рис. 7).

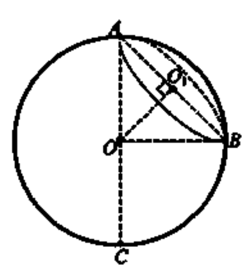


Рис. 7

***Найти***: $AC$

***Решение***: $C_{\text{окр.}} = 2\pi r$; $2\pi r = 5\pi$; $r = 2{,}5$ (см). Из $\Delta AO_1O$: $\angle O_1OA = 90° - 60° = 30° \Rightarrow AO_1 = \dfrac{1}{2}AO$;

$2{,}5 = \dfrac{1}{2}AO \Rightarrow AO = 5$ см. $AC = 10$ см. (*Ответ*: 10 см.)

***№ 2. Дано***: конус; $CD = 5$ см; $\cup CBD = 90°$; $\angle SEO = 60°$(рис. 8).

***Найти***: $S_{\text{б.п.к.}}$

***Решение***: $S_{\text{б.п.к.}} = \pi R\ell$, так как $\cup CBD = 90°$, то $\angle DOC = 90°$. Из $\Delta DOC$: $CD^2 = OD^2 + OC^2$; $25 = R^2 + R^2$; $2R^2 = 25$; $R^2 = \dfrac{25}{2}$; $R = \dfrac{5}{\sqrt{2}}$, так как

$\angle SEO = 60°$, то $\angle ESO = 30° \Rightarrow OE = \frac{1}{2}SE$. Пусть $OE = x$; $SE = 2x$. Из $\Delta COE$:

$SO = \sqrt{SE^2 - OE^2} = \sqrt{4x^2 - x^2} = \sqrt{3x^2} = x\sqrt{3}$. Из $\Delta CEO$: $OE = \sqrt{OC^2 - CE^2} =$

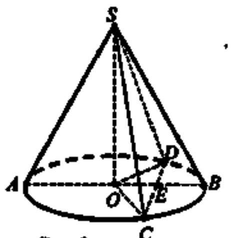


Рис. 8

$= \sqrt{\frac{25}{2} - \left(\frac{5}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{25}{2} - \frac{25}{4}} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2} = 2{,}5$ (см),

тогда $SO = 2{,}5\sqrt{3}$ (см). Из $\Delta SOC$: $SC =$

$= \sqrt{SO^2 + OC^2} = \sqrt{\frac{25 \cdot 3}{4} + \frac{25}{3}} = \sqrt{\frac{25 \cdot 5}{4}} = \frac{5}{2}\sqrt{5}$.

$S_{б.п.к.} = \pi \frac{5}{\sqrt{2}} \cdot \frac{5 \cdot \sqrt{5}}{2} = \frac{25\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}\pi = \frac{25\sqrt{10}}{4}\pi$ (см$^2$).

(*Ответ*: $\frac{25\sqrt{10}}{4}\pi$ см$^2$.)

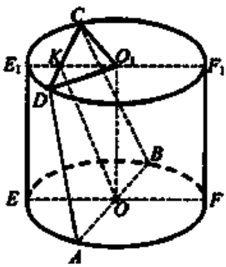


Рис. 9

**№ 3.** *Дано*: цилиндр; $\angle KOE = \alpha$; $CD = b$; $\cup CE_1D = \beta$ (рис. 9).

*Найти*: $OO_1$

*Решение*: $\angle CO_1D = \beta$; Из $\Delta CO_1D$: $CD^2 = 2R^2 - 2R^2\cos\beta = 2R^2(1 - \cos\beta) = 4R^2\sin^2\frac{\beta}{2}$; $CD = 2R\sin\frac{\beta}{2}$

$\Rightarrow R = \frac{b}{2\sin\beta/2}$. Из $\Delta O_1KC$ (прямоугольный):

$$O_1K = \sqrt{CO_1^2 - KC^2} = \sqrt{\frac{b^2}{4\sin^2\beta/2} - \left(\frac{b}{2}\right)^2} =$$

$$\sqrt{\frac{b^2}{4}\left(\frac{1}{\sin^2\beta/2} - 1\right)} = \frac{b}{2}\sqrt{\frac{1-\sin^2\beta/2}{\sin^2\beta/2} - 1} = \frac{b}{2}\sqrt{\frac{\cos^2\beta/2}{\sin^2\beta/2}} = \frac{b}{2}\sqrt{\mathrm{ctg}^2\beta/2} =$$

$\frac{b}{2}\mathrm{ctg}\,\beta/2$. $\angle KOO_1 = 90° - \alpha$; $\mathrm{tg}(90° - \alpha) = \mathrm{ctg}\,\alpha =$

$= \frac{KO_1}{OO_1} \Rightarrow OO_1 = \frac{b\,\mathrm{ctg}\,\beta/2}{2\,\mathrm{ctg}\,\alpha} = \frac{1}{2}b\,\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{ctg}\,\beta/2$.

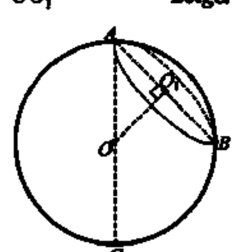


Рис. 10

(*Ответ*: $\frac{1}{2}b\,\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{ctg}\,\beta/2$.)

***Вариант II***

**№ 1.** *Дано*: шар AC = d; $\angle BAC = 30°$ (рис. 10).

*Найти*: $C_{окр.сеч.}$

*Решение*: $C_{окр.} = 2\pi r$; $AO = \frac{d}{2}$, так как $\angle BAC = 30°$, то $OO_1 = \frac{1}{2}AO = \frac{1}{2} \cdot \frac{d}{2} = \frac{d}{4}$. Из

$\Delta AO_1O$: $AO_1 = \sqrt{AO^2 - OO_1^2} = \sqrt{\frac{d^2}{4} - \frac{d^2}{16}} = \sqrt{\frac{3d^2}{16}} = \frac{d\sqrt{3}}{4}$. $C_{\text{окр.}} = 2\pi \cdot \frac{d\sqrt{3}}{4} = \frac{\pi d\sqrt{3}}{2}$. (*Ответ*: $\frac{\pi d\sqrt{3}}{2}$.)

**№ 2.** *Дано*: цилиндр; $\cup CBD = 120°$; $CD_1 = 20$ см; $OK = 3$ см (рис. 11).

*Найти*: $S_{\text{б.п.ц.}}$

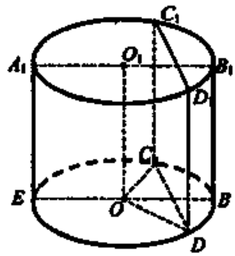


*Рис. 11*

*Решение*: $S_{\text{б.п.ц.}} = 2\pi RH$. $\angle COD = 120°$; $\angle KOD = 60°$, тогда $\angle KDO = 30° \Rightarrow OK = \frac{1}{2}OD$. Следовательно, $OD = 6$ см. $KD = \sqrt{OD^2 - OK^2} = \sqrt{6^2 - 3^2} = \sqrt{36-9} = 3\sqrt{3}$; $CD = 2 \cdot KD = 6\sqrt{3}$. Из $\Delta CDD_1$: $DD_1 = \sqrt{400-108} = \sqrt{292} = 2\sqrt{73}$. $S_{\text{б.п.ц}} = 2\pi \cdot 6 \cdot 2\sqrt{73} = 24\pi\sqrt{73}$ (см$^2$). (*Ответ*: $24\pi\sqrt{73}$ см$^2$.)

**№ 3.** *Дано*: конус; $AO = OB = r$; $\angle SEO = 60°$; $\angle SCO = 45°$ (рис. 12).

*Найти*: $S_{\text{сеч.}}$

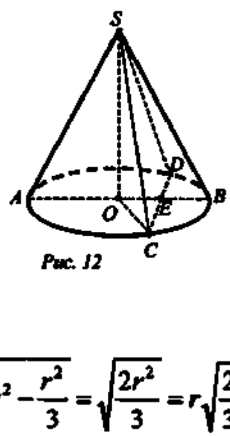


*Рис. 12*

*Решение*: $S_{\text{сеч.}} = \frac{1}{2} CD \cdot SE$. Из $\Delta SOC$: $\angle SCO = \angle CSO = 45° \Rightarrow SO = OC = r$. Из $\Delta SOE$: $\angle SEO = 60°$; $\angle OSE = 30° \Rightarrow OE = \frac{1}{2}SE$. Пусть $OE = x$, тогда $SE = 2x$, так как $SO^2 + OE^2 = SE^2$, то $r^2 + x^2 = (2x)^2$; $r^2 = 3x^2$; $x^2 = \frac{r^2}{3}$; $x = \frac{r\sqrt{3}}{3}$;

$OE = \frac{r\sqrt{3}}{3}$; $SE = \frac{2r\sqrt{3}}{3}$. $SE = \sqrt{OC^2 - OE^2} = \sqrt{r^2 - \frac{r^2}{3}} = \sqrt{\frac{2r^2}{3}} = r\sqrt{\frac{2}{3}}$. $CD = 2 \cdot CE = 2r\sqrt{\frac{2}{3}}$. $S_{\text{сеч.}} = \frac{1}{2} \cdot 2r\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \frac{2r\sqrt{3}}{3} = \frac{2\sqrt{2}r^2}{3}$ (кв. ед.). (*Ответ*: $\frac{2\sqrt{2}}{3}r^2$ кв. ед.)

## Урок 30. Зачет по теме: «Тела вращения»

*Цель*:

– систематизировать знания учащихся;
– обобщить изученный материал.

## Ход урока

### I. Организационный момент

### II. Обобщение и повторение основных моментов теории по теме

1) Поверхность цилиндра состоит из …
2) Как называется множество точек пространства, находящихся на заданном расстоянии от данной точки?
3) Около всякой ли четырехугольной призмы можно описать цилиндр?
4) Отрезки, соединяющие вершину конуса с точками окружности основания, называют ...
5) Перечислите возможное взаимное расположение сферы и плоскости.
6) Точки $A$ и $B$ принадлежат шару. Принадлежит ли этому шару любая точка отрезка $AB$?
7) Составьте уравнение сферы с центром в точке $A$ (2; –4; 7) и $R = 3$.
8) Какая фигура является пересечением сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ и плоскости $x + y = 4$?
9) Как изменится поверхность шара, если его радиус увеличить в 3 раза?
10) Сколько сфер можно провести через окружность и точку, не лежащую на ней?
11) Плоскость, проходящая через центр шара, называется …
12) Сечение конуса плоскостью, проходящей через его ось, называется
13) Что называется высотой цилиндра?
14) Найдите соответствующую формулу, указав путь стрелкой:

| | |
|---|---|
| $\pi D$ | $S_{б.п.к.}$ |
| $\pi R(1 + r)$ | $S_{п.п.к.}$ |
| $2\pi RH + 2\pi R^2$ | $S_{б.п.ц.}$ |
| $\pi D_1$ | $S_{п.п.к.}$ |
| $2\pi r$ | $S_{б.п.к.}$ |
| $2\pi RH$ | $S_{б.п.ц.}$ |
| $\pi R(1 + r)$ | $S_{п.п.ц.}$ |
| $\pi R(H + r)$ | |
| $\pi r_1$ | |

### III. Проведение зачета по карточкам (см. приложение)

*Ответы:*

| Уровень | Вариант | № задачи | Ответ |
|---|---|---|---|
| *I уровень* | *Вариант I* | 2 | $30\pi$ см$^2$ |
| | | 3 | $36\sqrt{3}$ см$^2$ |
| | | 4 | $8R^2$ см$^2$ |
| | *Вариант II* | 2 | $24\pi$ см$^2$ |
| | | 3 | $32\pi$ см$^2$ |
| | | 4 | $a^2\sqrt{2}$ см$^2$ |
| | *Вариант III* | 2 | $100\pi$ см$^2$ |
| | | 3 | $36$ см$^2$ |
| | | 4 | $24\sqrt{3}\,R^2$ кв. ед. |
| | *Вариант IV* | 2 | $42\pi$ см$^2$ |
| | | 3 | $72\pi$ см$^2$ |
| | | 4 | $\frac{4\pi\ell^2}{3}$ кв. ед. |
| *II уровень* | *Вариант I* | 2 | $4\pi a(a+b)$ кв. ед |
| | | 3 | $576\pi$ см$^2$ |
| | | 4 | а) $4R^2\sin\alpha/2\,\mathrm{tg}\beta$ кв. ед.<br>в) $4R^2\sin\alpha/2\,\mathrm{tg}\beta$ кв. ед. |
| | *Вариант II* | 2 | $\pi a(a+b+2c)$ |
| | | 3 | 7 см |
| | | 4 | а) $H^2\mathrm{ctg}\beta^2$<br>в) $\frac{H^2\mathrm{ctg}\beta}{\cos\alpha}$ |
| | *Вариант III* | 2 | $2\pi c(a+2b)$ |
| | | 3 | а) $\frac{\pi H^2\mathrm{tg}^2\alpha}{4}$<br>в) $\frac{H^2\sin\beta}{2\cos^2\alpha}$ |
| | | 4 | $S\sin\alpha/2$ |
| | *Вариант IV* | 2 | $\pi(ac+2bc+a^2)$ |
| | | 3 | а) $\frac{\pi a^2\mathrm{tg}\alpha}{16\sin^2\alpha/2}$<br>в) $\frac{a^2\mathrm{tg}\beta}{4}$ |
| | | 4 | $\frac{Q}{\sin\alpha/2}$ |

## IV. Подведение итогов

---

## Домашнее задание

I уровень: № 595; 589*а*); повт. № 529; 535.

II уровень: № 613; 606; повт. № 529; 535.

*I уровень*

**Карточка № 1**

*№ 2. Дано*: $AC = 8$ см; $BC = 5$ см (рис. 9).

*Найти*:

*Решение*: $S_{п.к.} = 2S_{б.п.к.} = 2\pi R\ell = 2\pi \cdot OB \cdot BC$. $OB = 2\pi \cdot 3 \cdot 5 = 30\pi$. (*Ответ*: $30\pi$ см$^2$.)

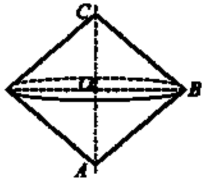



*Рис. 9*

*№ 3. Дано*: $SO = 6$ см, $\angle SBO = 30°$ (рис. 10).

*Найти*: $S_{сеч.}$

*Решение*: $S_{сеч.} = \frac{1}{2}\ell \cdot \ell \cdot \sin 60° = \frac{1}{2}\ell^2\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}\ell^2}{4}$. Из $\Delta SOB$: $BS = 2SO$ (так как $\angle\beta = 30°$) $\ell = 12$ (см). $S_{сеч.} = \frac{\sqrt{3} \cdot 12^2}{4} = 36\sqrt{3}$ (см$^2$). (*Ответ*: $36\sqrt{3}$ см$^2$.)

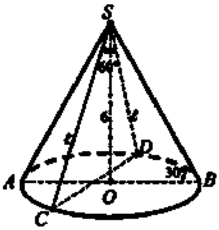



*Рис. 10*

*№ 4. Дано*: $r_{шара} - R$; $AC^2 = 2x^2$; $AC = x\sqrt{2}$ (рис. 11).

*Найти*: $S_{п.п.куба}$

*Решение*: $S_{п.п.куба} = 6a^2$. $A_1C = 2R$. Из $\Delta AA_1C$ $x^2 + 2x^2 = 4R^2$; $3x^2 = 4R^2$; $x^2 = \frac{4}{3}R^2$; $x = \frac{2R}{\sqrt{3}} = a$ – ребро куба. $S_{п.п.куба} = 6\frac{4R^2}{3} = 8R^2$ (кв. ед.). (*Ответ*: $8R^2$ кв. ед.)

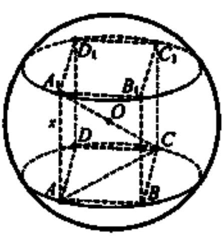



*Рис. 11*

**Карточка № 2**

*№ 2. Дано*: $AB = 4$ см; $BC = 3$ см (рис. 12).

*Найти*: $S_{п.к.}$

*Решение*: $S_{п.к.} = \pi R\ell + \pi R^2$; $\ell = 5$ см; $R = 3$ см. $S_{п.п.} = \pi \cdot 3 \cdot 5 + \pi \cdot 3^2 = 24\pi$ (см$^2$). (*Ответ*: $24\pi$ см$^2$.)

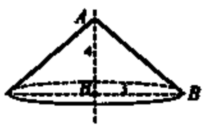



*Рис. 12*

*№ 3. Дано*: $R_{ш.} = 8$ см, $\angle OAB = 45°$ (рис. 13).

*Найти*: $S_{сеч.}$

*Решение*: $S_{сеч.} = \pi r^2$; $\cos 45° = \frac{AO_1}{AO}$; $AO_1 = r = 8 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}$. $S_{сеч.} = \pi \cdot 16 \cdot 2 = 32\pi$ (см$^2$). (*Ответ*: $32\pi$ см$^2$.)

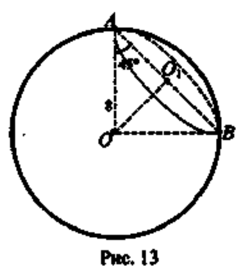



Рис. 13

*№ 4. Дано*: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб (рис. 14).

*Найти*: $S_{ос.сеч.цил}$

*Решение*: $S_{\text{сеч.}} = 2R \cdot H$; $2R = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$;

$S_{\text{сеч}} = aH\sqrt{2} = a^2\sqrt{2}$ (кв. ед.). (*Ответ*: $a^2\sqrt{2}$ кв. ед.)

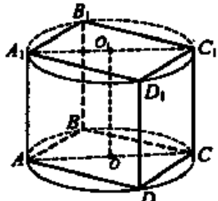


*Рис. 14*

**Карточка № 3**

*№ 2. Дано*: $AD = 8$ см; $BC = 6$ см (рис. 15).

*Найти*: $S_{\text{п.п.}}$

*Решение*: $S_{\text{п.п.}} = 4\pi r^2 + 4R^2$; $r = \dfrac{BC}{2}$; $R = \dfrac{AD}{2}$.

$S_{\text{п.п.}} = 4\pi \cdot 3^2 + 4\pi \cdot 4^2 = 36\pi + 64\pi = 100\pi$ (см$^2$).

(*Ответ*: $100\pi$ см$^2$. π)

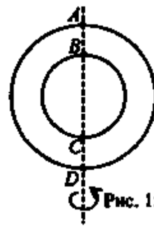


Рис. 15

*№ 3 Дано*: $\cup CBD = 90°$; $H_{\text{ц.}} = 6$ см, OE = 3 см (рис. 16).

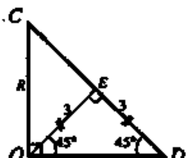
*Найти*: $S_{\text{сеч.}}$

*Решение*: $S_{\text{сеч.}} = CD \cdot CC_1$;

$S_{\text{сеч.}} = 6 \cdot CD$; $OE = ED = 3$ см;

$CD = 6$ см; $S_{\text{сеч.}} = \; = 36$ (см$^2$).

(*Ответ*: 36 см$^2$.



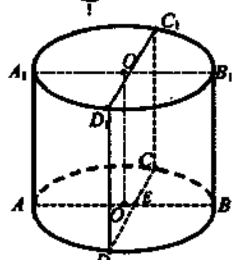



Рис. 16

*№ 4. Дано*: (рис. 17).

*Найти*: $S_{\text{п.п.тетр.}}$

*Решение*: $S_{\text{п.п.тетр.}} = 4\dfrac{1}{4}a^2\sqrt{3}$;

$S_{\text{п.п.}} = a^2\sqrt{3}$; $OO_1 = R = \dfrac{1}{4}SO$,

так как $\dfrac{SO_1}{OO_1} = \dfrac{1}{3}$. $a_3 = R\sqrt{3}$

$\Rightarrow AO = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$; $SO = \sqrt{a^2 - \dfrac{a^2}{3}} =$

$= a\sqrt{\dfrac{2}{3}}$; $R = \dfrac{1}{4}a\sqrt{\dfrac{2}{3}}$; $a = \dfrac{4\sqrt{3}R}{\sqrt{2}}$;

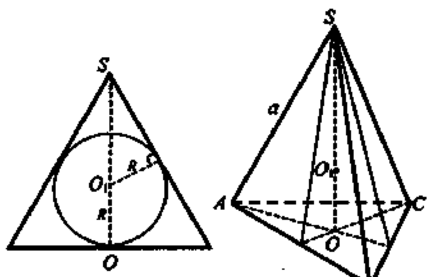


Рис. 17

$S_{\text{п.п.}} = \dfrac{16 \cdot 3R^2}{2} \cdot \sqrt{3} = 24\sqrt{3}R^2$. (*Ответ*: $24\sqrt{3}R^2$ кв. ед.)

**Карточка № 4**

*№ 2. Дано*: $AB = 3$ см; $AC = 5$ см (рис. 18).

*Найти*: $S_{\text{п.п.}}$

*Решение*: $BC = \sqrt{25-9} = 4$; $S_{\text{п.п.}} = 2\pi \underline{RH} + 2\pi R^2 =$

$= 2\pi \cdot 3 \cdot 4 + 2\pi \cdot 3^2 = 24\pi + 18\pi$ (см$^2$).

(*Ответ*: $42\pi$ см$^2$.)

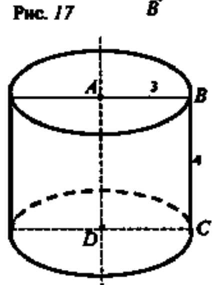


*Рис. 18*

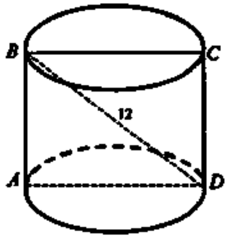



Рис. 19

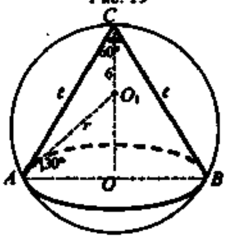



Рис. 20

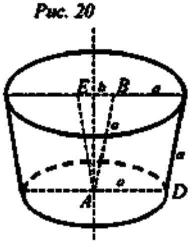



Рис. 21

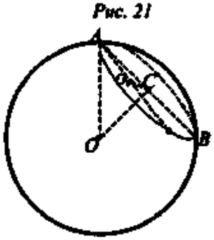



Рис. 22

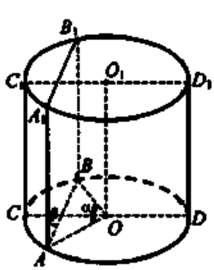



Рис. 23

**№ 3.** *Решение*: (рис. 19) $AB^2 + AD^2 = BD^2$; $2x^2 = BD^2$; $x = \frac{BD}{\sqrt{2}} = \frac{12}{\sqrt{2}} = \frac{12\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2}$; $R = 3\sqrt{2}$; $H = 6\sqrt{2}$. $S_{б.п.ц.} = 2\pi RH = 2\pi \cdot 3\sqrt{2} \cdot 6\sqrt{2} = 72\pi$ (см$^2$). (*Ответ*: $72\pi$ см$^2$.)

**№ 4.** *Решение*: (рис. 20) $AB = \ell$; $R = \frac{\ell}{2}$; $S_{сф.} = 4\pi r^2$; $\cos 30° = \frac{R}{r}$; $r = \frac{\ell \cdot 2}{2\sqrt{3}} = \frac{\ell\sqrt{3}}{3}$; $S_{сф.} = 4\pi\frac{\ell^2}{3} = \frac{4}{3}\pi\ell^2$ (кв. ед.). (*Ответ*: $\frac{4}{3}\pi\ell^2$ кв. ед.)

### *II уровень*

**Карточка № 1**

**№ 2.** *Дано*: ABCD – ромб, $AB = a$, $BE = b$ (рис. 21).

*Найти*: $S_{п.п.т.вр.}$

*Решение*: $S_{б.п.ус.к.} = \pi(R_1 + R_2)\ell$; $S_{п.п.т.вр.} = \pi(a + a + b) \cdot a + \pi a^2 + \pi(a + b)^2 + 2\pi ab - \pi b^2 = \underline{2\pi a^2} + \pi ab + \underline{\pi a^2} + \underline{\pi a^2} + 2\pi ab + \pi b^2 + \pi ab - \pi b^2 = 4\pi a^2 + 4\pi ab = 4\pi a(a + b)$ (кв. ед.) (*Ответ*: $4\pi a(a + + b)$ кв. ед.)

**№ 3.** *Дано*: $AB = 40$ см, $OC = 15$ см, $OO_1 = 7$ см. (рис. 22).

*Найти*: $S_{сеч.}$

*Решение*: $OO_1 \perp$ плоскости сечения. $\Delta OO_1C$ – прямоугольный: $O_1C = \sqrt{225 - 49} = \sqrt{176}$. $O_1C \perp AB$, так как $OC \perp AB$ и $O_1C$ является проекцией наклонной $OC$ на плоскость сечения. Т. о. из $\Delta ACO_1$: $AO_1 = \sqrt{20^2 + 176} = \sqrt{576} = 24$ см; $r_{сеч.} = 24$ см. $S_{сеч.} = \pi r^2 = 576\pi$ (см$^2$). (*Ответ*: $567\pi$ см$^2$.)

**№ 4** *Дано*: цилиндр; $ABB_1A_1$ – сечение $\parallel$ оси цилиндра; $\angle AOB = \alpha$; $\angle B_1AB = \beta$; $AO = BO = R$ (рис. 23).

*Найти*: а) $S_{сеч.}$ $ABB_1A_1$; б) $S$ осевого сечения $CDD_1C$.

*Решение*:

$AB^2 = R^2 + R^2 - 2R \cdot R\cos\alpha = 2R^2 - 2R^2\cos\alpha = 2R^2(1 - \cos\alpha)$; $BB_1 = AB\,\text{tg}\beta = R\sqrt{2(1 - \cos\alpha)} \cdot \text{tg}\beta$.

$S_{сеч.} = AB \cdot BB_1 = R\sqrt{2(1 - \cos\alpha)} \cdot R\sqrt{2(1 - \cos\alpha)} \cdot \text{tg}\beta = 2R^2\,\text{tg}\beta \cdot (1 - \cos\alpha) = 4R^2\,\text{tg}\beta\sin\frac{\alpha}{2}$; $S_{ос.сеч.} =$

$=SD \cdot BB_1 = 2R \cdot R\sqrt{2(1-\cos\alpha)} \cdot \quad \cdot \operatorname{tg}\beta = 2R^2\sqrt{4\sin^2\frac{\alpha}{2}} \cdot \operatorname{tg}\beta = 4R^2 \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg}\beta.$

(*Ответ*: $4R^2 \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg}\beta$.

**Карточка № 2**

***№ 2.*** *Дано*: $AD = a$; $BC = b$; $CD = c$ (рис. 24).

*Найти*: $S_{п.п.}$ тела вращения.

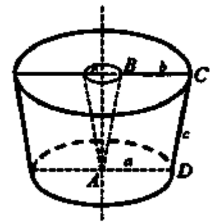


*Рис. 24*

*Решение*: $BE=\frac{a-b}{2}$; $S_{п.п.т.вр.} = \pi\left(a+b+\frac{a-b}{2}\right)\cdot c +$

$+\pi a^2 + \left(b+\frac{a-b}{2}\right)^2 - \pi\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 + \pi\left(\frac{a-b}{2}\right)\cdot c =$

$=\pi\left(\frac{3a+b}{2}\cdot c + a^2 + b^2 + ab - b^2 + \frac{a^2-2ab+b^2}{4} - \frac{a^2-2ab+b^2}{4} + \frac{a-b}{2}\cdot c\right) =$

$=\pi\left(\frac{3ac+bc+2a^2+2ab+ac-bc}{2}\right) = \frac{1}{2}\pi(2a^2+2ab+4ac) = \pi(a^2+ab+4ac) =$

$=\pi a(a+b+2c)$ (кв. ед.). (*Ответ*: $\pi a(a+b+2c)$ кв. ед.)

***№ 3*** (см. рис. 14) *Дано*: $AB = 40$ см; $OC = 15$ см; $S_{сеч.} = 576\pi$ см$^2$.

*Найти*: $OO_1$

*Решение*: $\pi r^2 = 576\pi \Rightarrow r = 24$ (см); т. е. $AO_1 = 24$ см. Из $\Delta ACO_1$ ($\angle ACO_1 = 90°$): $O_1C = \sqrt{24^2 - \left(\frac{40}{2}\right)^2} = \sqrt{576-400} = \sqrt{176}$. Из $\Delta OO_1C$ ($\angle OO_1C = 90°$): $\sqrt{15^2 - 176} = \sqrt{225-176} = 7$ (см). (*Ответ*: 7 см.)

***№ 4.*** *Дано*: пл. $CDD_1C_1 \parallel$ оси цилиндра, $\angle DCO = \alpha$; $\angle D_1CD = \beta$; $BB_1 = H$ (рис. 25).

*Найти*: а) $S_{сеч.}CDD_1C_1$; $S_{ос.сеч.}ABB_1A_1$.

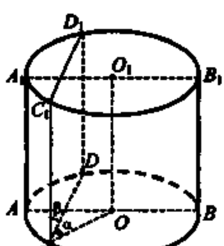


*Рис. 25*

*Решение*: Из $\Delta CDD_1$: $CD = \frac{H}{\operatorname{tg}\beta}$; $S_{CDD_1C_1} =$

$= CD \cdot DD_1 = \frac{H^2}{\operatorname{tg}\beta} = H^2 \operatorname{ctg}\beta$. $AO = CO$; $\frac{CD}{2} = \frac{H\operatorname{ctg}\beta}{2}$;

$\cos\alpha = \frac{CD/2}{CO}$; $CO = \frac{H\operatorname{ctg}\beta}{2\cos\alpha}$. $S_{ABB_1A_1} = AB \cdot BB_1 =$

$= 2\frac{H\operatorname{ctg}\beta}{2\cos\alpha} = \frac{H^2\operatorname{ctg}\beta}{\cos\alpha}$ (кв. ед.). (*Ответ*: $\frac{H^2\operatorname{ctg}\beta}{\cos\alpha}$ кв. ед.)

**Карточка № 3**

***№ 2.*** *Дано*: $ABCD$ – ромб; $AC = a$; $BC = c$; $BE = b$ (рис. 26).

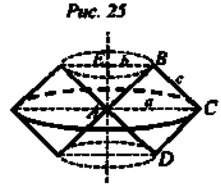


*Рис. 26*

*Найти*: $S_{п.п.т.вр.}$

*Решение:* $S_{п.п.т.пр.} = 2[\pi(a+b)\cdot c + \pi bc] = 2(\pi ac + \ + \pi bc + \pi bc) = 2\pi c(a + 2b)$ (кв. ед.).

(*Ответ*: $2\pi c(a + 2b)$ кв. ед.)

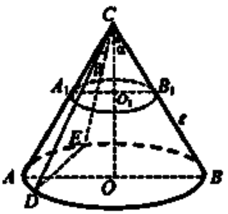


*Рис. 27*

№ 3. *Дано*: $CO = H$; $\angle OCB = \alpha$; $O_1C = OO_1$; $\angle DCE = \beta$ (рис. 27).

*Найти*: $S_{сеч.}$: окр. (ц. $O_1$; $R = A_1O_1$); $S_{DEC}$.

*Решение*: $CO_1 = \dfrac{H}{2}$; Из $\Delta CO_1B_1$: $O_1B_1 = \dfrac{1}{2}H\text{tg}\alpha$. $S_{сеч.} = \pi(O_1B_1)^2 = \dfrac{1}{4}\pi H^2\text{tg}^2\alpha$. Из $\Delta CO_1B_1$:

$CB_1 = \dfrac{H}{2\cos\alpha}$; $\ell = \dfrac{H}{\cos\alpha}$. $S_{\Delta DCE} = \dfrac{1}{2}\ell\cdot\ell\cdot\sin\beta = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{h2}{\cos 2\alpha}\cdot\sin\beta = \dfrac{H^2\sin\beta}{2\cos^2\alpha}$. (*Ответ*: а) $\dfrac{\pi H^2\text{tg}^2\alpha}{2}$; б) $\dfrac{H^2\sin\beta}{2\cos^2\alpha}$.)

№ 4 (см. рис. 8). Дано: цилиндр; $\angle COD = \alpha$; $S_{ADD_1A_1} = S$.

*Найти*: $S_{сеч.}CDD_1C_1$

*Решение*: $S_{сеч.} = CD\cdot DD_1$; пусть $CD = x$; $DD_1 = \dfrac{S}{2R}$. $S_{сеч.} = x\cdot\dfrac{S}{2R}$. Из $\Delta COD$:

$x = \sqrt{2R^2 - 2R^2\cos\alpha} = R\sqrt{2(1-\cos\alpha)} = R\cdot 2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}$. $S_{сеч.} = R\cdot 2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}\cdot\dfrac{S}{2R} = S\sin^2\dfrac{\alpha}{2}$ (кв. ед.). (*Ответ*: $S\sin^2\dfrac{\alpha}{2}$ кв. ед.)

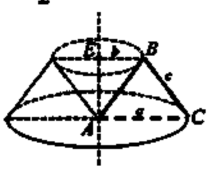


*Рис. 28*

**Карточка № 4**

№ 2. *Дано*: $\Delta ABC$ – равнобедренный; $AC = a$; $BC = c$; $BE = b$ (рис. 28).

*Найти*: $S_{п.п.}$ тела вращения.

*Решение*:

$S_{п.п.} = \pi(a+b)c + \pi a^2 + \pi bc = \pi(ac + bc + a^2 + bc) = \pi(ac + a^2 + 2bc)$ (кв. ед.).

*Ответ*: $\pi(ac + a^2 + 2bc)$ кв. ед.

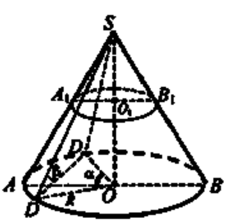


*Рис. 29*

№ 3. *Дано*: конус; $CD = a$; $\angle CSD = \beta$; $\angle COD = \alpha$ (рис. 29).

*Найти*: а) $S_{сеч.}$, окр. ($O_1$; $R = A_1B_1$); б) $S_{сеч.}$ $CDS$.

*Решение*: $a^2 = R^2 + R^2 - 2R^2\cos\alpha$; $R^2 = \dfrac{a_2}{2-2\cos\alpha} = \dfrac{a^2}{4\sin^2\alpha/2}$; $R = \dfrac{a}{2\sin\alpha/2}$; $\Delta SAO \sim \Delta SA_1O_1$: $\dfrac{A_1O_1}{AO} = \dfrac{1}{2}$; $A_1O_1 = \dfrac{1}{2}AO = \dfrac{1}{2}R = \dfrac{a}{4\sin\alpha/2}$; а) $S_{сеч.} = \pi\dfrac{a^2}{16\sin^2\alpha/2}$ (кв. ед.).

Из $\Delta CSK$: $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{SK}{CK}$; $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{SK}{\alpha/2}$; $SK = \dfrac{a\operatorname{tg}\beta}{2}$. $S_{сеч}\Delta CDS = \dfrac{1}{2}a \cdot SK =$

$= \dfrac{1}{2}a \cdot \dfrac{a\operatorname{tg}\beta}{2} = \dfrac{1}{4}a^2\operatorname{tg}^2\beta$.

(*Ответ*: а) $\pi\dfrac{a^2}{16\sin^2\alpha/2}$ кв. ед.; б) $\dfrac{1}{4}a^2\operatorname{tg}^2\beta$ кв. ед.)

*№ 4* (см. рис. 29). *Дано*: цилиндр; $S_{CC_1D_1D} = Q$; $\cup CBD = \alpha$.

*Найти*: $S_{ABB_1A_1}$.

*Решение*: так как $\cup CBD = \alpha$, то $\angle COD = \alpha$. $Q = CD \cdot DD_1$; $DD_1 = \dfrac{Q}{CD}$.

Из $\Delta COD$: $CD^2 = R^2 + R^2 - 2R^2\cos\alpha$; $CD^2 = 2R^2 - 2R^2\cos\alpha$; $CD^2 = 2R^2 \cdot$ $\cdot 2\sin^2\alpha/2$; $CD = 2R\sin^2\alpha/2 \Rightarrow R = \dfrac{CD}{2\sin\alpha/2}$; $S_{ос.сеч} = AB \cdot BB_1 = 2R \cdot DD_1 =$

$\dfrac{CD}{\sin\alpha/2} \cdot \dfrac{Q}{CD} = \dfrac{Q}{\sin\alpha/2}$. (*Ответ*: $\dfrac{Q}{\sin\alpha/2}$ кв. ед.)

**IV. Подведение итогов**

## Урок 31. Обобщение по теме: «Цилиндр, конус, сфера и шар»

*Цели урока:*

- систематизировать теоретический материал по темам «Цилиндр», «Конус», «Сфера» и «Шар»;
- совершенствовать навыки решения задач по изученным темам.

### Ход урока

**I. Организационный момент**

**II. Актуализация знаний учащихся**

Повторяется теоретический материал в процессе решения задач на готовых чертежах:

а) *Дано*: цилиндр, $AB_1 = 16$ см, $\angle B_1AB = 30°$ (рис. 1).

*Найти*: $h$; $R_{осн}$.

*Решение*:

1) $h_к = BB_1$;

2) Из $\Delta ABB_1$ находим $AB = 16 \cdot \cos 30° = \dfrac{16\cdot\sqrt{3}}{2} = 8\sqrt{3}$ (см); $R = \dfrac{1}{2}AB = 8\sqrt{3}\cdot\dfrac{1}{2} = 4\sqrt{3}$ (см);

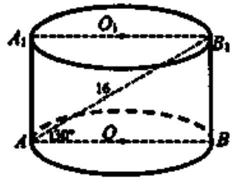


*Рис. 1*

3) Из $\Delta B_1AB$ находим $BB_1 = 16\cdot\sin30^\circ = 16\cdot\frac{1}{2} = 8$ см. (*Ответ*: h = 8 см; $R = 4\sqrt{3}$ см.)

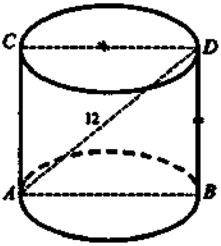



*Рис. 2*

б) *Дано*: цилиндр *ABCD* – квадрат; $AD = 12$ см (рис. 2).

*Найти*: $S_{ABCD}$; $S_{б.п.}$

*Решение*:

1) Так как *ABCD* – квадрат, то $AB = DB = 12 : \sqrt{2} = \frac{12\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2}$ (см);

2) $S_{ABCD} = (6\sqrt{2})^2 = 72$ (см$^2$);

3) $S_{б.п.} = 2\pi R\cdot h$, где $h = BD$; $S_{б.п.} = 2\pi\cdot\frac{6\sqrt{2}}{2}\cdot 6\sqrt{2} = 36\cdot 2\cdot\pi = 72\pi$ (см$^2$). (*Ответ*: $S_{ABCD} = 72$ см$^2$; $S_{б.п.} = 72\pi$ см$^2$.)

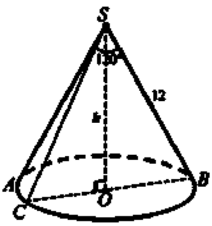



*Рис. 3*

в) *Дано*: конус, $\angle CSB = 120^\circ$; $SB = 12$ см (рис. 3).

*Найти*: $h_к$; $R_{осн.}$

*Решение*:

1) Из $\Delta$ *SCO* находим $h = SO = 12\sin\angle C$, $\angle C = (180^\circ - 120^\circ) : 2 = 30^\circ$; $h = 12\frac{1}{2} = 6$ (см);

2) Из $\Delta SCO$: $CO = 12\cdot\cos30^\circ = 12\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$ (см).

(*Ответ*: $h_к = 6$ см; $R_{осн.} = 6\sqrt{3}$ см.)

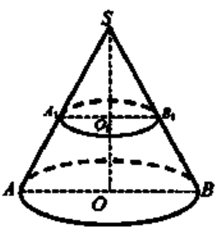



*Рис. 4*

г) *Дано*: конус, $SO = 16$ см; $SO_1 = 4$ см; $R_{осн.} = OB = 20$ см (рис. 4).

*Найти*: $S_{сеч.}$

*Решение*:

1) $S_{сеч.} = \pi R^2$, где $R_1$ – радиус сечения;

2) Рассмотрим $\Delta SO_1B_1$ и $\Delta SOB$? $\Delta SO_1B_1 \sim \Delta SOB$ по двум углам;

3) Из подобия треугольников $\Rightarrow$ $\frac{SO}{SO_1} = \frac{R}{R_1}$;

$$R_1 = \frac{20\cdot 4}{16} = 5 \text{ (см)};$$

4) $S_{сеч.} = \pi R_1^2 = \pi\cdot 25 = 25\pi$ (см$^2$).

(*Ответ*: $25\pi$ см$^2$.)

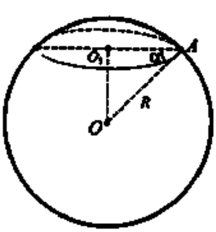



*Рис. 5*

д) *Дано*: шар, $R$ – радиус шара, $\angle OAO_1 = \alpha$ (рис. 5).

*Найти*: $S_{сеч.}$

*Решение*:

1) $S_{сеч.} = \pi R_1^2$, где $R_1$ – радиус сечения, $R_1 = O_1A$;

2) Из $\Delta OO_1A$: находим $R_1 = R \cdot \cos\alpha$;

3) $S_{сеч.} = \pi(R\cos\alpha)^2 = \pi \cdot R^2\cos^2\alpha$.

Ответ: $\pi R^2\cos^2\alpha$.

е) *Дано*: шар; сечение шара плоскостью; $\Delta ABC$ вписан в сечение; $AB = BC = 40$ см; $AC = 45$ см; $OO_1 = 5$ см (рис. 6).

*Найти*: $R_{шара}$; $R = OD$.

*Решение*:

1) пусть $R_1$ – радиус сечения шара;

2) $R_1 = \dfrac{abc}{4S_{\Delta ABC}}$, где $a$, $b$, $c$ – стороны $\Delta ABC$;

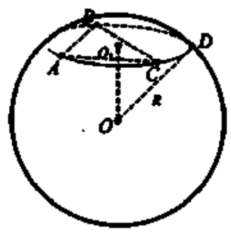



*Рис. 6*

$S_{\Delta ABC} = \sqrt{64 \cdot 24 \cdot 16} = 768$ (см²), $R_1 = \dfrac{40 \cdot 40 \cdot 48}{768} = 25$ (см); 4) из $\Delta OO_1D$ найдем $R = \sqrt{25^2 + 5^2} = \sqrt{650} = 5\sqrt{26}$ (см).

(*Ответ*: $5\sqrt{26}$ (см).)

*Ответы к задачам:*

а) $h = 8$ см; $R = 4\sqrt{3}$ см. б) $S_{ABCD} = 72$ см²; $S_{б.п.} = 72\pi$ см².

в) $h = 6$ см; $R_{осн.} = 6\sqrt{3}$ см. г) $S_{сеч.} = 25\pi$ см².

д) $\pi R^2\cos^2\alpha$. е) $5\sqrt{26}$ см.

При решении задач разрешается пользоваться таблицами. Задачи решаются самостоятельно с последующей самопроверкой и обсуждением тех из них, с которыми не справилось большинство учащихся.

## III. Теоретический тест с последующей самопроверкой
(см. приложение)

*Ответы*:

***Вариант I***

| Задание | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Ответ | г | б | в | в | г | а | в | б |

***Вариант II***

| Задание | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Ответ | б | б | в | б | г | б | а | б |

Самопроверка тестов проводится учителем следующим образом: учитель читает задание и просит одного из учащихся назвать правильный ответ, затем идет обсуждение правильности названного ответа, при этом снова можно использовать таблицы.

## IV. Подведение итогов

## Урок 32. Самостоятельное решение задач (Тексты задач берутся учителем из дополнительных глав)

*Цель урока:*

– закрепить умения по теме: «Цилиндр, конус, сфера, шар».

## Ход урока

**I. Решение задач**

№ 601–628. Ребята решают задачи на местах, затем, желающие выходят к доске и предлагают свое решение. Учитель корректирует ответ.

*I уровень*

***№ 604.*** При вращении прямоугольника вокруг неравных сторон получаются цилиндры, площади которых равны $S_1$ и $S_2$. *Найдите* диагональ прямоугольника.

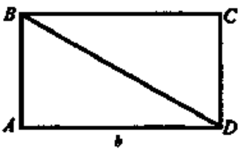


Рис. 7

*Дано*: цилиндры, полученные вращением вокруг стороны $AB$ и $AD$; $S_{п.п.} = S_1$ и $S'_{п.п.} = S_2$ (рис. 7).

*Найти*: $BD$.

*Решение*:

1) При вращении получим цилиндры, у которых радиусы оснований равны $AB = a$, $AD = b$;

2) $\begin{matrix} S_{п.п.} = \\ S_{п.п.} = \end{matrix}\begin{cases} S_1 = 2\pi ab + 2\pi b^2, \\ S_2 = 2\pi ab + 2\pi a^2 \end{cases}$; $\dfrac{S_1}{S_2} = \dfrac{2\pi b(a+b)}{2\pi a(a+b)}$; $\dfrac{S_1}{S_2} = \dfrac{a}{b} \Rightarrow$ подставим в

1-е уравнение системы: $a = \dfrac{S_1}{S_2}b,\ b = \dfrac{S_1}{S_2}a;\ 2\pi \cdot a \cdot a\dfrac{S_1}{S_2} + 2\pi \cdot a^2 \cdot \dfrac{S_1}{S_2} = S_1.$

$$S^1 = 2\pi a^2\left(\frac{S_1}{S_2} + \frac{S_1^2}{S_2^2}\right); a^2 = \frac{S_1}{2\pi(S_1S_2 + S_1^2)/S_2^2} = \frac{S_1S_2^2}{2\pi \cdot S_1(S_2 + S_1^2)} =$$

$$= \frac{S_2^2}{2\pi(S_2 + S_1^2)};\ b^2 = a^2\ \frac{S_1^2}{S_2^2} = \frac{S_2^2}{2\pi(S_1 + S_2)} \cdot \frac{S_1^2}{S_2^2} = \frac{S_1^2}{2\pi(S_1 + S_2)}.$$

3) Из $\Delta ABD$ найдем $BD = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\dfrac{S_2^2}{2\pi(S_1 + S_2)} + \dfrac{S_1^2}{2\pi(S_1 + S_2)}} =$

$$= \sqrt{\frac{S_2^2 + S_1^2}{2\pi(S_1 + S_2)}}.$$

(*Ответ*: $BD = AC = \sqrt{\dfrac{S_2^2 + S_1^2}{2\pi(S_1 + S_2)}}$.)

***№ 615.*** Прямоугольный треугольник с катетами $a$ и $b$ вращается вокруг гипотенузы. *Найдите* площадь поверхности полученного тела (рис. 2).

*Решение*:

1) При вращении треугольника $ABD$ вокруг гипотенузы $AD$ получили два конуса с общим основанием $S_{бок.} = \pi r\ell$, где $r$ – радиус основания конуса.

2) $DA = \sqrt{a^2+b^2}$, $\sin\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$;

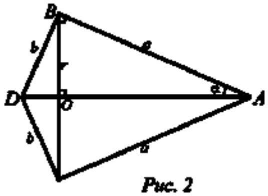


*Рис. 2*

$S_{\Delta DBA} = \dfrac{1}{2}ab$; $S_{\Delta DBA} = \dfrac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}\cdot r \Rightarrow$

$\Rightarrow r\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$;

3) $S_{бок.б.к.} = \pi\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot a = \pi\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot a.$

4) $S_{п.тела} = \dfrac{\pi a^2 b}{\sqrt{a^2+b^2}} + \dfrac{\pi a b^2}{\sqrt{a^2+b^2}} = \dfrac{\pi ab(a+b)}{\sqrt{a^2+b^2}}.$

(*Ответ*: $\dfrac{\pi ab(a+b)}{\sqrt{a^2+b^2}}$.)

***№ 618.*** **Диагонали осевого сечения усеченного конуса перпендикулярны. Одно из оснований осевого сечения равно 40 см, а его площадь равна 36 дм². Вычислите площади боковой и полной поверхности усеченного конуса.**

*Дано*: Усеченный конус, $AC$, $BD$ – диагонали; $AC \perp BD$. $AD = 40$ см, $S_{ABCD} = 36$ дм² (рис. 3).

*Найти*: $S_{бок.}$; $S_{п.п.}$

*Решение*:

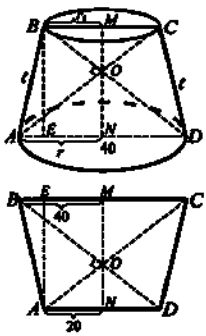


*Рис. 3*

1) $S_{бок.} = \pi(r+r_1)\cdot \ell$, $r = \dfrac{1}{2}AD = 20$ см.

2) $\ell = AB = CD$.

3) $r_1 = \dfrac{1}{2}BC = BM$.

4) $AC \perp BD \Rightarrow MN = \dfrac{1}{2}(BC+AD)$.

5) $S_{ABCD} = 36$ дм²; $S_{ABCD} = \dfrac{1}{2}(BC+AD)\cdot MN$, но

$\dfrac{1}{2}(BC+AD) = MN \Rightarrow S_{ABCD} = (MN)^2 = 36$ дм². $MN = 6$ дм $= 60$ см.

6) $\dfrac{BC+AD}{2} = 60$; $2r_1 + 40 = 120$, $r_1 = 40$ (см), $BC = 2r_1 = 80$ см.

7) $AE \perp BC$, $BE = 40 - 20 = 20$ (см).

8) Из $\Delta ABE$: $AB = \sqrt{20^2+60^2} = 20\sqrt{10}$ (см).

9) $S_{бок.} = \pi(40+20)\cdot 20\sqrt{10} = 1200\sqrt{10}\,\pi$ (см²) $= \pi 12\sqrt{10}$ (дм²).

10) $S_{в.осн.} = \pi r_1^2 = 1600\pi$ (см²), $S_{н.осн.} = 400\pi$ (см²) $= 4\pi$ (дм²); $S_{п.п.} =$

$= \pi 12\sqrt{10} + 16\pi + 4\pi = \pi 12\sqrt{10} + 20\pi$ (дм²).

(*Ответ*: $12\pi\sqrt{10} + 20\pi$ (дм²).)

### *II уровень*

1) Докажите, что если одна из граней вписанной в цилиндр треугольной призмы проходит через ось цилиндра, то две другие грани взаимно перпендикулярны.
2) Сфера вписанная в цилиндр (т. е. она касается оснований цилиндра и каждой его образующей). Найдите отношение площади сферы к площади полной поверхности цилиндра.
3) В конусе с углом φ при вершине осевого сечения и радиусом основания $r$ вписана сфера радиуса $R$ (т. е. сфера касается основания конуса и каждой его образующей). *Найдите* $r$, если известны $R$ и φ.

***№ 1. Решение:***

*Дано*: цилиндр, $ABCA_1B_1C_1$ – треугольная призма, $AA_1B_1B$ проходит через $OO_1$ (рис. 4).

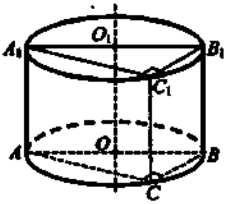



*Рис. 4*

*Доказать*: $AA_1C_1C \perp BCC_1B_1$.

*Доказательство*:

1) $AB$ – диаметр основания цилиндра $\angle ACB = 90°$, $BC \perp CC_1$, $CC_1$ перпендикулярна основанию цилиндра;
2) Так как $CC_1$ перпендикулярна основанию, то $BC \perp ACC_1$, значит, угол между плоскостями равен 90°, по признаку перпендикулярности 2-х плоскостей $\Rightarrow AA_1C_1C \perp BCC_1B_1$, что и требовалось доказать.

***№ 2. Решение:***

1) В цилиндр можно вписать сферу, если его осевое сечение квадрат (рис. 5).

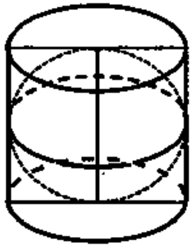


*Рис. 5*

2) Пусть $R$ – радиус цилиндра, тогда $R$ – радиус сферы, а $h = 2R$.
3) $S_{сф} = 4\pi R^2$; $S_ц = 2\pi R(R + h)$; $S_ц = 2\pi R(R + 2R)$;

$$\frac{S_{сф}}{S_ц} = \frac{4\pi R^2}{6\pi R^2} = \frac{2}{3}.$$

(*Ответ*: $\frac{2}{3}$.)

***№ 3.*** *Дано*: Конус, в который вписана сфера радиуса $R$, $\angle ACB = φ$ (рис. 6).

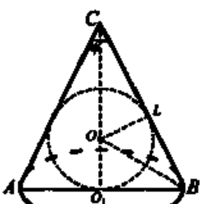



*Рис. 6*

***Найти***: $r_к$.

***Решение***:

1) В любой конус можно вписать сферу.
2) $O_1B = r$, а $OL = R$, $\angle FCD = φ$.
3) Из $\triangle ACB$: $\angle ABC = 90° - \frac{φ}{2}$.

4) $BO$ – биссектриса $\angle B$, $\angle O_1BO = 45° - \dfrac{\varphi}{2}$.

5) $BO_1 = OO_1 \cdot \mathrm{ctg}\angle B$, $r = R \cdot \mathrm{ctg}\left(45° - \dfrac{\varphi}{2}\right)$ или $r = R \cdot \mathrm{ctg}\left(45° - \dfrac{\varphi}{2}\right)$.

(*Ответ*: $r = R \cdot \mathrm{ctg}\left(45° - \dfrac{\varphi}{2}\right)$.)

***III уровень***

Осевое сечение конуса есть треугольник с углом 120°. Радиус основания конуса – 6 м. Найдите площадь сечения, проходящего через две образующие, угол между которыми 30° (рис. 7).

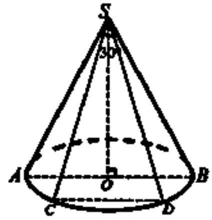


*Рис. 7*

*Дано*: $R = 6$ м, $\angle ASB = 120°$.

*Найти*: $S_{\text{сеч.}}$

*Решение*:

1) $S_{\text{сеч.}} = S\Delta CSD = \dfrac{1}{2} CS \cdot SD \sin 30°$.

2) Из $\Delta OSB$ находим $SB$.

3) $\angle SBO = (180° - 120°) : 3 = 30°$, $\angle B = 30°$.

4) Из $\Delta SOB$: $\cos 30° = \dfrac{OB}{SB}$; $SB = \dfrac{6}{\cos 30°} = \dfrac{6 \cdot 2}{\sqrt{3}} = \dfrac{12\sqrt{3}}{3} = 4\sqrt{3}$ (см).

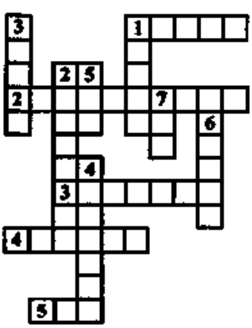
5) $S_{\text{сеч.}} = \dfrac{1}{2} \cdot 4\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{3} \dfrac{1}{2} = 12$ см$^2$.

(*Ответ*: 12 см$^2$.)

## II. Подведение итогов

## Домашнее задание

Разгадать кроссворд на тему «Тела и фигуры вращения»




**По горизонтали:** 1. Фигура на плоскости, все точки которой расположены не далее данного расстояния от одной точки. 2. Прямая, при вращении которой вокруг оси образуется боковая поверхность цилиндра, конуса. 3. Тело, полученное вращением прямоугольника вокруг одной из его сторон. 4. Угол между высотой и плоскостью основания конуса. 5. Тело, полученное вращением круга вокруг оси, лежащей в плоскости круга и не пересекающей его.

**По вертикали:** 1. Тело, полученное вращением прямоугольного треугольника вокруг одного из его катетов. 2. Плоская фигура, при вращении которой образуется усеченный конус. 3. Тело вращения, являющееся верхней частью архитектурного сооружения. 4. Отрезок, соединяющий две точки сферы и проходящий через центр шара. 5. Тело, полученное вращением полукруга вокруг его диаметра. 6. Фигура, полученная вращением полуокружности вокруг ее диаметра. 7. Тело вращения, об устойчивости движения которого написана известная работа великой русской женщины-математика.

Ответы:

**По горизонтали:** 1. Круг. 2. Образующая. 3. Цилиндр. 4. Прямой. 5. Тор.

**По вертикали:** 1. Конус. 2. Трапеция. 3. Купол. 4. Диаметр. 5. Шар. 6. Сфера. 7. Юла.

## Глава VII

## ОБЪЕМЫ ТЕЛ

### §1. Объем прямоугольного параллелепипеда (уроки 33–35)

### Урок 33. Понятие объема. Объем прямоугольного параллелепипеда

*Цели урока:*

- ввести понятие объема тела;
- рассмотреть свойства объемов, теорему об объеме прямоугольного параллелепипеда.

### Ход урока

**I. Организационный момент**

**II. Объяснение нового материала**

1. Объем – одна из основных величин, связанных с геометрическими телами. Задача вычисления объемов простейших тел, идущая от практических потребностей, была одним из стимулов развития геометрии. Математика Древнего Востока (Вавилония, Египет) располагала рядом правил для вычисления объема тел, с которыми чаще всего приходилось встречаться на практике (призматические брусья; пирамиды полные и усеченные, цилиндры). Среди формул объема были и неточные, дававшие не слишком заметную процентную ошибку лишь в пределах употребительных линейных размеров тела. Но в «началах» Евклида и в сочинениях Архимеда имеются только точные правила для вычисления объемов многоугольников и некоторых круглых тел (цилиндра, конуса, шара и их частей).

Чтобы найти объем сначала выбирают единицу измерения. В Древнем Риме, например, одной из единиц объема служила амфора (около 25,5 л). Нефть во всем мире принято сейчас измерять в англо-американских единицах – баррелях, т.е. бочках емкостью 159 л. В России распространенная в быту мера объема – ведро.

2. Ну а в геометрии за единицу объема принимают объем куба с ребром единичной длины. Подчеркнем, что объем куба полностью определяется длиной ребра.

1 $см^3$ – это куб с ребром 1 см.

1 $м^3$ – это куб с ребром 1 м и т.д.

Объем – это положительная величина.

***Свойства объемов:***

1. *Равные тела имеют равные объемы (рис. 159 а), б) в учебнике).*
2. *Если тело составлено из нескольких тел, то его объем равен сумме объемов этих тел (рис. 160 в учебнике).*
3. *Если одно тело содержит другое, то объем первого тела не меньше объема второго.*

Следствие: объем куба с ребром $\frac{1}{n}$ равен $\frac{1}{n^3}$.

***Теорема:*** **Объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению трех его измерений.**

*Дано*: $P$ – прямоугольный параллелепипед, $a$, $b$, $c$ – измерения, $V$ – объем.

*Доказать*: $V = a \cdot b \cdot$ c.

*Доказательство*:

*1 случай.*

$a$, $b$, $c$ – конечные десятичные дроби, у которых число знаков после запятой не превосходит n (n ≥ 1).

$a \cdot 10n$, $b \cdot 10n$, $c \cdot 10n$ явл. целыми.

Разобьем ребра на равные части длины $\frac{1}{10^n}$. $P$ разобьем на $a \cdot b \cdot$ c $\cdot\ 103n$ равных кубов с ребром $\frac{1}{10^n}$; $V_{куба} = \frac{1}{10^{3n}}$, то

$V_p = a \cdot b \cdot$ c $\cdot\ 103n \cdot \frac{1}{10^{3n}} = abc$. Итак $V = abc$.

*2 случай* (необязательное).

Когда одно из измерений $a$, $b$, $c$ – представляет собой бесконечную десятичную дробь.

Рассмотрим конечные десятичные дроби $a_n$, $b_n$, $c_n$, которые получаются из чисел $a$, $b$, $c$ если отбросить в каждом из них все цифры после запятой, начиная с $(n + 1)$-й.

$$a_n \le a \le a_n \text{ где } a_n' = a_n + \frac{1}{10^n}$$

$$b_n \le b \le b_n,\ b_n' = b_n + \frac{1}{10^n}$$

$$c_n \le c \le c_n,\ c_n' = c_n + \frac{1}{10^n}$$

$$\underbrace{a_n b_n c_n}_{V_n} \le abc \le \underbrace{a_n' b_n' c_n'}_{V_n} \quad (1)$$

Так как параллелепипед $P$ содержит в себе параллелепипед $P'_n$, а сам содержится в параллелепипеде $P'_n$, то объем $V$ параллелепипеда $P$ заключен между $V_n = a_n b_n c_n$ и $V'_n = a'_n b'_n c'_n$ т.е. $a_n b_n c_n \le V \le a'_n b'_n c'_n$ (2) $n \to \infty$,

тогда $\frac{1}{10^n} \to 0$, значит, число $a'_n b'_n c'_n$ будет сколь угодно мало отличаться от числа $a_n b_n c_n$. В силу неравенств (1) и (2) следует, что число $V$ сколь угодно мало отличается от числа $abc$. Значит, они равны: $V = abc$, что и требовалось доказать.

*Следствие 1.*

Объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению площади основания на высоту.

$V = \underbrace{a \cdot b}_{S} \cdot \underbrace{c}_{h} = S \cdot h$; $V = S \cdot h$.

**III. Закрепление изученного материала**

***Задача № 647 б).***

Тело $R$ состоит из тел $P$ и $Q$, имеющих соответственно объемы $V_1$ $V_2$. Выразить объем $V$ тела $R$ через $V_1$ $V_2$ если б) тела $P$ и $Q$ имеют общую часть, объем которой равен $\frac{1}{3}V_1$.

*Решение:* $V = V_1 + V_2 - \frac{1}{3}V_1 = \frac{2}{3}V_1 + V_2$.

***Задача № 648 а), б).***

*Найти* объем прямоугольного параллелепипеда, стороны основания которого равны $a$ и $b$, а высота равна $h$, если: $a = 11$, $b = 12$, $h = 15$; б) $a = 3\sqrt{2}$, $b = \sqrt{5}$, $h = 10\sqrt{10}$.

I В (а): $V = 11 \cdot 12 \cdot 15 = 1980$.

II В (б): $V = 3\sqrt{2} \cdot \sqrt{5} \cdot 10\sqrt{10} = 300$.

***Задача № 649 б).***

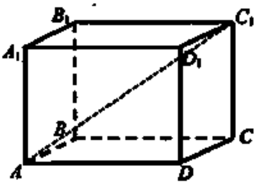



*Рис. 1*

*Дано:* $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб, $AC_1 = 3\sqrt{2}$ (рис. 1).

*Найти:* $V$.

*Решение:* Пусть ребро куба равно $a$, тогда $AC_1^2 = 3a^2$, $a = \frac{AC_1}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \sqrt{6}$. $V = (\sqrt{6})3 = 6\sqrt{6}$ (см$^3$). (*Ответ*: $6\sqrt{6}$ см$^3$.)

***Задача № 651.***

Кирпич имеет форму прямоугольного параллелепипеда с измерениями 25 см, 12 см и 6,5 см. Плотность кирпича равна 1,8 г/см3. *Найти* его массу.

*Решение*: $V = 25 \cdot 12 \cdot 6{,}5 = 1950$ (см$^3$). $\rho = \frac{m}{V}$; $m = \rho \cdot V$; $m = 1{,}8 \cdot 1950 = 3{,}51$ (кг). (*Ответ*: 3,51 кг.)

## IV. Подведение итогов

---

**Домашнее задание**

П. 63–64 (до следствия 2). № 648 *в), г)*, 649 *в)*, 652.

# Урок 34. Объем прямоугольного параллелепипеда. Объем прямоугольной призмы, основанием которой является прямоугольный треугольник

*Цели урока:*

- повторить свойства объемов, объем прямоугольного параллелепипеда;
- рассмотреть следствие об объеме прямой призмы, основанием которой является прямоугольный треугольник.

## Ход урока

**I. Организационный момент**

**II. Актуализация знаний учащихся**

1. Теоретический опрос.

Подготовить у доски доказательство теоремы об объеме прямоугольного параллелепипеда (в случае когда *a*, *b*, *c* – конечные десятичные дроби).

2. Проверка домашнего задания.
   а) № 652 – ученик на доске записывает решение задачи.
   б) Индивидуально проверить домашние задачи № 648 (*в, г*), 649 (*в*) из рабочей тетради (выборочно, 4–5 учащихся).

***Задача № 652.*** *Дано*: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямоугольный параллелепипед. $AC_1 = 13$ см, $BD = 12$ см, $BC_1 = 11$ см (рис. 1).

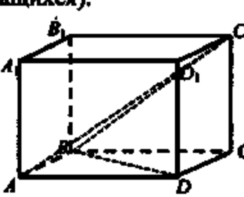



*Рис. 1*

*Найти*: *V*.

*Решение*: $V = AD \cdot AB \cdot AA_1$.

1) Диагональ и измерения (*a*, *b*, *c*) прямоугольного параллелепипеда связаны соотношением: $AD^2 + AB^2 + AA_1^2 = AC_1^2$, так как $AD^2 + AB^2 = BD^2$, имеем $12^2 + + AA_1^2 = 13^2$, $AA_1 = 5$ см.

2) $BC_1^2 = BC^2 + CC_1^2$, то $BC^2 = 11^2 - 5^2$; $BC = 4\sqrt{6}$ (см), $BC = AD =$ $= 4\sqrt{6}$ (см).

3) $AD^2 + AB^2 = BD^2$; $AB = \sqrt{12^2 - (4\sqrt{6})^2} = 4\sqrt{3}$ (см). Тогда $V =$ $= AD \cdot AB \cdot AA_1$. $V = 4\sqrt{6} \cdot 4\sqrt{3} \cdot 5 = 240\sqrt{2}$ (см³)

(*Ответ*: $240\sqrt{2}$ см³.)

***Задача № 648 в), г).***

в) $V = (18 \cdot 5\sqrt{3}) \cdot 13 = 1170\sqrt{3}$.

г) $V = 3\frac{1}{3} \cdot \sqrt{5} \cdot 0{,}96 = \frac{10 \cdot 96}{3 \cdot 100}\sqrt{5} = \frac{32}{10}\sqrt{5} = 3{,}2\sqrt{5}$.

(*Ответ*: $3{,}2\sqrt{5}$.)

***Задача № 649 b)***. *Дано*: $DE = 1$ см, $E$ – середина ребра $AB$ куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 2).

*Найти*: $V_{ABCDA_1B_1C_1D_1}$.

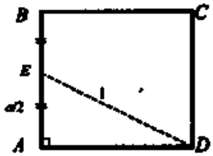



*Рис. 2*

*Решение*: Рассмотрим основание $ABCD$ куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Пусть ребро куба равно $a$. Из $\Delta EAD$:

$$1 = a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{5}{4}a^2; \quad a^2 = \frac{4}{5}; \quad a = \frac{2}{\sqrt{5}}. \quad V = a^3 =$$

$$= \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^3 = \frac{8}{5\sqrt{5}} = \frac{8\sqrt{5}}{25} \text{ (см}^3\text{)}.$$ (*Ответ*: $\frac{8\sqrt{5}}{25}$ см$^3$.)

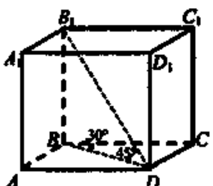



*Рис. 3*

3) Остальные решают задачу по готовому чертежу (на доске).

*Дано*: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямоугольный параллелепипед. $B_1D = 10\sqrt{2}$ (рис. 3).

*Найти*: $V$.

*Решение*:

1. Рассмотрим $\Delta BB_1D$ – прямоугольный (рис. 4).

$$\Delta BB_1D: \quad \left.\begin{matrix} \angle D = 45° \\ \angle B = 90° \end{matrix}\right\} \Rightarrow \angle B_1 = 45°, \quad \text{значит,}$$


*Рис. 4*

$BD = B_1B$. $BD = 10\sqrt{2} \cdot \cos D = 10\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 10$.

$BB_1 = 10 = h$.

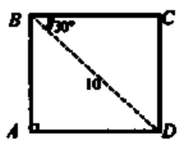



Рис. 5

2. (рис. 5). $\Delta BCD$: $\angle B = 30°$, $\angle C = 90°$, значит, $CD = 5$, $BC = \sqrt{BD^2 - CD^2}$. $BC = \sqrt{100 - 25} = 5\sqrt{3}$. $BC = 5\sqrt{3}$.
3. $V = CD \cdot BC \cdot BB_1$, $V = 5 \cdot 5\sqrt{3} \cdot 10 = 250\sqrt{3}$.

## III. Изучение нового материала

Рассмотреть следствие № 2 и доказать его.

Объем прямой призмы, основанием которой является прямоугольный треугольник, равен произведению площади основания на высоту.

1. Прочитать самостоятельно доказательства следствия № 2.
2. Запись формулы объема в тетради.

$$V = \frac{1}{2}(2S_{ABC} \cdot h) = S_{ABC} \cdot h.$$

Обсуждение (материала) доказательства.

### IV. Решение задачи

*Задача № 653. Дано*: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямоугольный параллелепипед, диагональ $D_1B = 18$ составляет угол в 30° с плоскостью боковой грани, и угол в 45° с боковым ребром (рис. 6).

*Найти*: *V*.

*Решение*: $BC_1$ – проекция $D_1B$ на плоскость боковой грани $BB_1C_1C$, поэтому $\angle D_1BC_1 = 30°$, $\angle D_1BB_1 = 45°$.

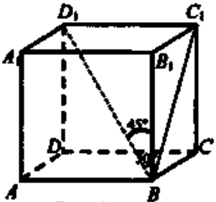


*Рис. 6*

1. Рассмотрим $\Delta D_1C_1B$: $\angle D_1C_1B = 90°$ (рис. 7). $\angle B = 30° \Rightarrow D_1C_1 = \frac{1}{2} \cdot 18 = 9$ (см).
2. Рассмотрим $\Delta D_1B_1B$ – прямоугольный: $BB_1 = 18\cos 45° = 18 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 9\sqrt{2}$ (см).

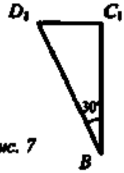


*Рис. 7*

3. Диагональ (*d*) и измерения (*a*, *b*, *c*) прямоугольного параллелепипеда связаны соотношением: $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$. $18^2 = 9^2 + (9\sqrt{2})^2 + B_1C_1^2$ ($\Delta D_1B_1B$: $B_1B = D_1B_1$). $B_1C_1^2 = 18^2 - 9^2 - (9\sqrt{2})^2 = 9^2 \cdot 2^2 - 9^2 - 9^2(\sqrt{2})^2 =$ $= 9^2(4 - 1 - 2) = 9^2$. $B_1C_1 = 9$ (см). $V = 9 \cdot 9\sqrt{2} \cdot 9 = 729\sqrt{2}$ (см$^3$).

(*Ответ*: $V = 729\sqrt{2}$ см$^3$.)

### V. Подведение итогов

Выставление оценок.

---

### VI. Домашнее задание

Гл. VII. § 1. п. 63, 64. (теория); № 656, 658. Вопрос № 1. стр. 169.

## Урок 35. Объем прямоугольного параллелепипеда

*Цели урока:*

– закрепление знаний, умений и навыков учащихся по изученной теме, устранение пробелов в знаниях.
– совершенствование навыков решения задач на применение теорем об объеме прямоугольного параллелепипеда и следствия 1 и 2.

## Ход урока

### I. Организационный момент

### II. Проверка домашнего задания

(самопроверка)

На доске решения задач.

*Задача № 656. Дано*: $ABCDA_1B_1C_1D_1$, $\angle B_1DB = 45°$. $\angle A_1B_1BD = 60°$ – двугранный угол. $BD = 12$ см (рис. 1).

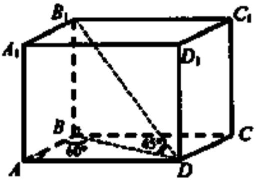



Рис. 1

*Найти:* $V$.

*Решение:*

1. В прямоугольном параллелепипеде грани – прямоугольники. $AC = BD = 12$ см. $A_1B_1 \parallel AB$; $AB \perp B_1B$; $BD \perp BB_1$; $\angle ABD = 60°$ – линейный угол двугранного угла $A_1B_1BD$.
2. $\Delta B_1BD : B_1B = BD = 12$ см. $\Delta ABD : AB =$

$$= \frac{1}{2} \cdot 12 = 6 \text{ см. } AD = 12\frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3} \text{ (см). } V = 6 \cdot 6\sqrt{3} \cdot 12 = 432\sqrt{3} \text{ (см}^3\text{).}$$

(*Ответ*: $432\sqrt{3}$.)

***Задача № 658.*** *Дано*: $ABCA_1B_1C_1$ – прямая призма. $\angle BAC = 90°$, $BC = 37$ см, $AB = 35$ см, $AA_1 = 1{,}1$ дм $= 11$ см (рис. 2).

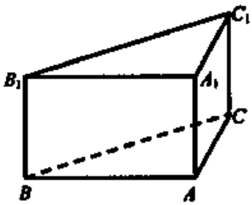



Рис. 2

*Найти:* $V$.

*Решение:*

1. $V = S_{ABC} \cdot AA_1$ (по следствию 2); $S_{ABC} = \frac{1}{2} BA \cdot AC$.
2. $AC = \sqrt{BC^2 - AB^2}$ $AC = 12$ см.
3. $S_\Delta = \frac{1}{2} 35 \cdot 12 = 210$ (см$^2$).
4. $V = S_{\Delta ABC} \cdot AA_1$. $V = 210 \cdot 11 = 2310$ (см$^3$) (можно 2,31 дм$^3$).

(*Ответ*: 2310 см$^3$.)

**III. Устная работа по готовым чертежам**

*Найти:* $V$.

1) рис. 3

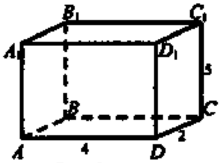



Рис. 3

$V = 4 \cdot 2 \cdot 5 = 40$.

2) рис. 4

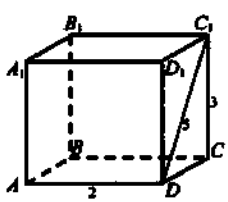



Рис. 4

1. $DC = \sqrt{25 - 9} = 4$.
2. $V = 2 \cdot 4 \cdot 3 = 24$.

3) Письменно (по готовому чертежу)

*Дано*: $B_1D = d$ (рис. 5).

*Найти:* $V$.

*Решение*:

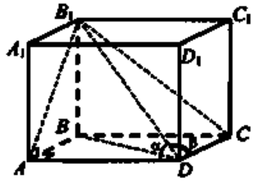



*Рис. 5*

1. $\Delta B_1AD$ (рис. 6): $B_1A \perp AD$. $AD = d\cos\alpha$, $B_1A = d\sin\alpha$.
2. $\Delta B_1CD$ (рис. 7): $B_1C \perp DC$. $DC = d\cos\beta$, $B_1C = d\sin\beta$.
3. $S_{осн.} = AD \cdot DC$. $S_{осн.} = d^2\cos\alpha\cos\beta$.
4. $\Delta ABD$, где $\angle A = 90°$; $AB = d\cos\beta$; $AD = d\cos\alpha$. $BD = \sqrt{d^2\cos^2\beta + d^2\cos^2\alpha}$;

   $BD = d\sqrt{\cos^2\beta + \cos^2\alpha}$;

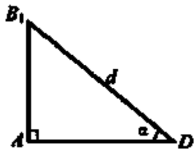



*Рис. 6*

5. $\Delta B_1BD$; $\angle B = 90°$. $B_1D = d$;

   $BD = d\sqrt{\cos^2\beta + \cos^2\alpha}$;

   $BB_1 = \sqrt{d^2(1 - \cos^2\beta - \cos^2\alpha)}$. $BB_1 =$

   $= \mathrm{d}\sqrt{\sin^2\beta - \cos^2\alpha}$ $BB_1 = \mathrm{h}$.

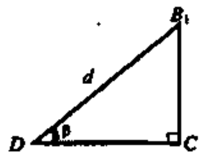



*Рис. 7*

6. $V = S_{осн.} \cdot h = d^2\cos\alpha\cos\beta \cdot d\sqrt{\sin^2\beta - \cos^2\alpha}$.

   $V = d^3\cos\alpha \cdot \cos\beta\sqrt{\sin^2\beta - \cos^2\alpha}$

(*Ответ*: $d^3\cos\alpha\cos\beta\sqrt{\sin^2\beta - \cos^2\alpha}$.)

**IV. Самостоятельная работа (контролирующего характера на 12 мин)**

***Вариант I***

1. Измерения прямоугольного параллелепипеда равны 2,5 см, 5 см, 5 см. Найти ребро куба, объем которого в два раза больше объема данного параллелепипеда.

($V_{п.} = 2{,}5 \cdot 5 \cdot 5 = 62{,}5$ см$^3$, $V_к = 2 \cdot V = 125$ см$^3$, $a = \sqrt[3]{V_K}$; $a = 5$ см.)

2. *Найти* объем прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$, если $\angle ACB = 90°$; $\angle BAC = 30°$; $AB = a$; $CB = BB_1$ (рис. 8).

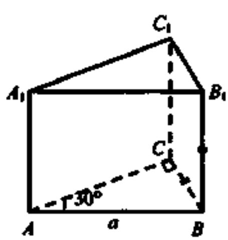



*Рис. 8*

*Решение*: $V_{пр.} = S_{ABC} \cdot h$. $CB = \dfrac{1}{2}a$. $CA =$

$= \sqrt{a^2 - \dfrac{a}{4}} = \dfrac{a}{2}\sqrt{3}$. $S_\Delta = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2}a \cdot \dfrac{a}{2}\sqrt{3} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{8}$.

$h = \dfrac{1}{2}a$; $V_{пр.} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{8} \cdot \dfrac{1}{2}a$; $V_{пр.} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{16}$.

(*Ответ*: $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{16}$.)

*Вариант II*

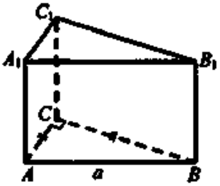


*Рис. 9*

1. Измерения прямоугольного параллелепипеда равны 2 см, 6 см, 6 см. Найти ребро куба, объем которого в три раза больше объема данного параллелепипеда (рис. 9). ($V_{п.} = 2 \cdot 6 \cdot 6 = 72$. $V_{к.} = 72 \cdot 3$; $V_{к.} = a^3$; $a = \sqrt{V_K}$ $a = \sqrt{72 \cdot 3} = \sqrt{3^3 \cdot 2^3} = 6$.)

2. Найти объем прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$, если $\angle ACB = 90°$, $AB = BB_1 = a$; $AC = CB$. $V_{пр.} = S_{осн.} \cdot h$. $\Delta ACB : \angle C = 90°$, $AC = CB$, значит $\angle A = 45° = \angle B$. $AC = AB \cdot \cos 45°$.

$$AC = \frac{a\sqrt{2}}{2}.\ S_\Delta = \frac{1}{2}\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4}.\ V = \frac{a^2}{4} \cdot a = \frac{a^3}{4}.$$

(*Ответ*: $\frac{a^3}{4}$.)

**V. Подведение итогов**

– Как определить объем прямоугольного параллелепипеда?

---

**Домашнее задание**

№ 657. Подготовить I В. – п. 65; II В. – п. 66.

---

## §2. Объем прямой призмы и цилиндра (уроки 33–35)

---

## Урок 36. Объем прямой призмы

*Цель урока:*

– изучить с учащимися теорему об объеме прямой призмы;
– выработать навыки решения задач с использованием формулы объема прямой призмы.

### Ход урока

**I. Организационный момент**

**II. Актуализация опорных знаний**

1. Итоги самостоятельной работы, указать на типичные ошибки.

2. Ответить на вопросы, возникшие при выполнении домашней работы.
3. Повторение (фронтальный опрос).
   а) Какой многогранник называется призмой?
   б) Какая призма называется прямой?
   в) Какая призма называется правильной?
   г) Что является основанием правильной треугольной призмы?
   д) Чем являются боковые грани призмы? Прямой призмы? Правильной призмы? (Параллелограммы, прямоугольники, равные прямоугольники.)
   е) Сформулируйте свойства объемов?
   ж) Сформулируйте следствие из теоремы об объеме прямоугольного параллелепипеда, в основании которого прямоугольный треугольник.

**III. Изучение новой темы**

Итак, мы с Вами повторили тот материал, который нам понадобится для изучения новой темы. Запишите в тетрадь тему сегодняшнего урока: «Объем прямой призмы».

Докажем теорему: **Объем прямой призмы равен произведению площади основания на высоту.**

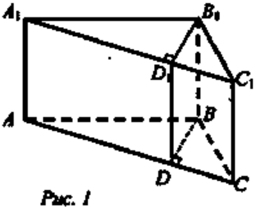


*Рис. 1*

*Дано*: прямая призма (рис. 1).

*Доказать*: $V = S_о \cdot h$.

*Доказательство*:

1. $ABCA_1B_1C_1$ – прямая призма. $BD \perp AC$ (выберем высоту, которая делит $\Delta ABC$ на два треугольника) проведем $(BDD_1) \perp (ABC)$, получим две призмы, основания которых прямоугольные треугольники, и они прямые.

$V_1$ и $V_2$ их объемы $V_1 = S_{ABD} \cdot$ h, $V_2 = S_{BDC} \cdot h$, тогда $V = V_1 + V_2 = S_{ABD} \cdot h + S_{BDC} \cdot h = h \cdot (S_{ABD} + S_{BDC}) = h \cdot S_{ABC} = h \cdot S_O$. $V = h \cdot S_O$.

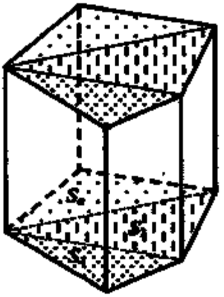


*Рис. 2*

2. Рассмотрим $n$-угольную произвольную призму, ее можно разбить на $(n–2)$ прямые треугольные призмы (рис. 2) с $V_K = S_K \cdot h$.
$V = V_1 + V_2 + V_3 + \ldots + V_{n-2} = S_1 \cdot h + S_2 \cdot h + S_3 \cdot h + \ldots + S_{n-2} \cdot h = h \cdot (S_1 + S_2 + S_3 + \ldots + S_{n-2}) = S_O \cdot h$.

Итак $V_{пр.} = S_O \cdot h$.

**IV. Формирование умений и навыков учащихся**

Решение задач по готовым чертежам, через кодоскоп на экран.

Рассуждаем устно, делая промежуточные записи в тетради.

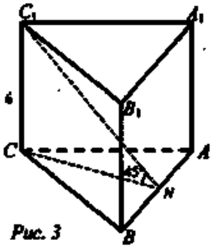



Рис. 3

1. *Дано*: $ABCA_1B_1C_1$ – прямая призма, $AC = BC$, $\angle ACB = 90°$, $BN = NA$, $\angle CNC_1 = 45°$, $CC_1 = 6$ (рис. 3).

*Найти*: $V$.

$$V = S_O \cdot \mathrm{h} = \frac{1}{2}(6\sqrt{2})^2 \cdot 6 = 6^2 \cdot 6 = 216.$$

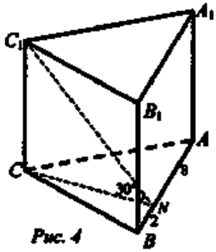



Рис. 4

2. *Дано*: $ABCA_1B_1C_1$ – прямая призма $\angle ACB = 90°$, $\angle CNB = 90°$, $NB = 2$, $\angle AN = 8$, $\angle C_1NC = 30°$ (рис. 4).

*Найти*: $V$.

$V = S_O \cdot h$.

$$V = \frac{1}{2} CN \cdot BA \cdot CC_1,\ CN \perp BA.\ CN^2 = BN \cdot NA.$$

$$CC_1 = \mathrm{tg}30° \cdot CN.\ V = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 10 \cdot \frac{4\sqrt{3}}{3} = \frac{80\sqrt{3}}{3}.$$

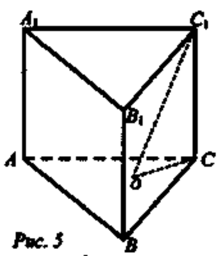



Рис. 5

3. *Дано*: $ABCA_1B_1C_1$ – прямая призма $AB = 13$; $CB = 14$; $AC = 15$ (рис. 5).

$O$ – центр описанной около $\Delta ABC$ окружности, $\angle C_1OC = 30°$.

*Найти*: $V$.

$S$ – формула Герона

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\text{противолежащий катет}}{\text{прилежащий катет}};\quad R = \frac{a \cdot b \cdot c}{4S_\Delta};$$

$$V = \frac{abc \cdot \mathrm{tg}30°}{4}.$$

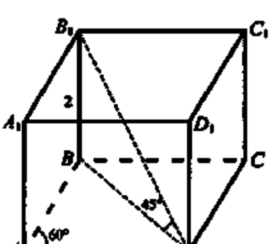



Рис. 6

4. *Дано*: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямая призма, $ABCD$ – ромб, $\angle BAD = 60°$(рис. 6).

$BB_1 = 2$, $\angle B_1DB = 45°$.

*Найти*: $V$.

$S_p = AB \cdot AD \cdot \sin 60°$. $\Delta ABD$ – равносторонний. $V = 2^2 \cdot \sin 60° \cdot 2 = 4\sqrt{3}$.

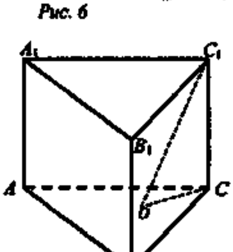



Рис. 7

5. *Дано*: $ABCA_1B_1C_1$ – правильная призма. $O$ – центр $\Delta ABC$ $\angle C_1OC = 30°$, $C_1O = 4\sqrt{3}$ (рис. 7).

*Найти*: $V$.

$$R = \frac{a\sqrt{3}}{3}.\ V = S_O \cdot h = \frac{1}{2}(6\sqrt{3})^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2\sqrt{3} =$$

$= 18 \cdot 9 = 162$

6. В тетрадь № 665.

Прочитали условия, ответили на мои вопросы:

1. Что представляет собой правильная шестиугольная призма?
2. Вы помните изображение ее на плоскости?
3. Какая диагональ в этой призме наибольшая?
4. Каким свойством обладает большая диагональ правильного шестиугольника? (Диаметр описанной окружности.)
5. Как связаны между собой сторона правильного шестиугольника и радиус описанной окружности? (Равны.)

А теперь самостоятельно оформите и решите задачу.

*Дано*: $ABCDFM...M_1$ – правильная шестиугольная призма. $AD_1 = 8$ см – наибольшая диагональ. $\angle AD_1D = 30°$ (рис. 8).

*Найти*: $V$.

*Решение*: $V = S_O \cdot h$. $h = DD_1$ в $\Delta ADD_1$, $\angle D = 90°$. $\angle D_1 = 30°$, $DD_1 = AD_1 \cdot \cos 30°$. $DD_1 = 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$, $AD = 4$ см, $OD = OC\ CD = 2$ см. $S_O = 6 \cdot S_{\Delta OCD} = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, $S_O = 6\sqrt{3}$ см. $V = 6\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{3} = 72$ (см$^3$). (*Ответ*: $V = 72$ см$^3$.)

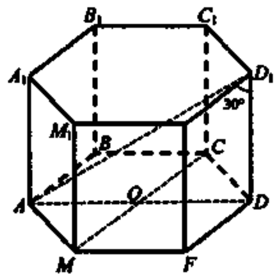


*Рис. 8*

**V. Подведение итогов**

– Какие данные необходимы для определения объема прямой призмы?

---

**Домашнее задание**

П. 65 № 659 *а*), 663 *а, б*), 664.

## Урок 37. Объем цилиндра

*Цели урока:*

– изучить с учащимися теорему об объеме цилиндра;
– выработать навыки решения задач с использованием объема цилиндра.

## Ход урока

**I. Организационный момент**

Собрать тетради с домашней работой для проверки.

1. Поверка домашней работы.

***Задача № 659 а).*** *Дано*: $ABCA_1B_1C_1$ – прямая призма. $\angle BAC = 120°$, $AB = 5$ см, $AC = 3$ см, $S_{BB_1C_1C} == 35$ см$^2$ (рис. 1).

*Найдите*: $V_{пр.}$

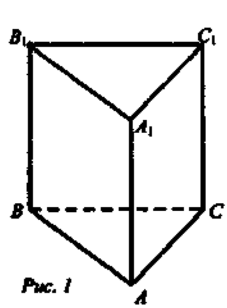


*Рис. 1*

*Решение*: $V_{\text{пр.}} = S_{\text{осн.}} \cdot h$.

1) $S_{\text{осн.}} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin\angle BAC$. $S_{\text{осн.}} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \cdot 3 \sin 120° = \frac{15\sqrt{3}}{4}$ (см$^2$).
2) Наибольшую площадь имеет боковая грань $BB_1C_1C$, так как сторона $BC$ – большая сторона $\Delta ABC$ (лежит против большего угла). Сторону $BC$ находим по теореме косинусов. $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos\angle BAC$. $BC = \sqrt{25 + 9 - 2 \cdot 5 \cdot 3 \cos 120°} = 7$ (см).
3) Найдем высоту призмы. $S_{BB_1C_1C} = BC \cdot CC_1$, $35 = BC \cdot h$, $h = \frac{35}{7} = 5$ (см).
4) $V = \frac{15\sqrt{3}}{4} \cdot 5 = \frac{75\sqrt{3}}{4}$ (см$^3$).

(*Ответ*: $\frac{75\sqrt{3}}{4}$ см$^3$.)

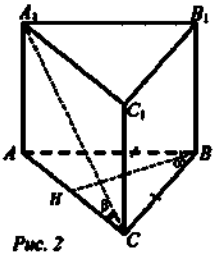


Рис. 2

***Задача № 661.*** *Дано*: $ABCA_1B_1C_1$ – прямая призма. $AB = BC$, $\angle ABC = \alpha$; $A_1C = l$, $\angle ACA_1 = \beta$ (рис. 2).

*Найти*: $V_{\text{пр.}}$

*Решение*:

1) $V = S_{\text{осн.}} \cdot h$.
2) Из $\Delta AA_1C$: $h = AA_1 = l\sin\beta$; $AC = l\cos\beta$.
3) Рассмотрим $\Delta ABC$. Проведем в нем высоту $BH$; так как $\Delta ABC$ равнобедренный, то $BH$ является медианой и биссектрисой, т.е. $HC = \frac{1}{2} AC = \frac{l\cos\beta}{2}$, $\angle HBC = \frac{1}{2}\angle ABC = \frac{\alpha}{2}$.
4) Из $\Delta HBC$: $HB = \dfrac{HC}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} = \dfrac{l\cos\beta}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$.
5) $S_{\text{осн.}} = \frac{1}{2} AC \cdot BH$. $S_{\text{осн.}} = \frac{1}{2} l\cos\beta \cdot \dfrac{l\cos\beta}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} = \dfrac{l^2\cos^2\beta}{4\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$.
6) $V = \dfrac{l^2\cos^2\beta}{4\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} \cdot l\sin\beta = \dfrac{l^3\sin\beta\cos^2\beta}{4\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$.

(*Ответ*: $\dfrac{l^3\sin\beta\cos^2\beta}{4\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$.)

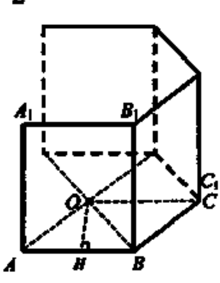


Рис. 3

***Задача № 663 в).*** *Дано*: правильная n-угольная призма. $AB = a$, $AA_1 = a$, $n = 6$ (рис. 3).

*Найти*: $V_{\text{пр.}}$

*Решение*:

1) $V_{\text{пр.}} = S_{\text{осн.}} \cdot h$.

2) $S_{осн.} = 6S_{\Delta AOB}$, $h = a$. $\Delta AOB$ – правильный, $S_\Delta = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

$$S_{осн.} = 6\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}.$$

3) $V_{пр.} = \dfrac{3a^2\sqrt{3}}{2} \cdot a = 1{,}5a^3\sqrt{3}.$

(*Ответ*: $1{,}5a^3\sqrt{3}$.)

***Задача № 663 г).*** *Дано*: правильная $n$-угольная призма. $AB = a$, $AA_1 = a$, $n = 8$.

*Найти*: $V_{пр.}$

*Решение*:

1) $V_{пр.} = S_{осн.} \cdot h$, $h = a$.

2) Найдем $S_{осн.}$, $S_{осн.} = 8\ S_{\Delta AOB}$. Рассмотрим $\Delta AOB$ – равнобедренный, $\angle AOB = \dfrac{360}{8} = 45°$. Проведем $OH \perp AB$; $OH$ – высота, медиана и биссектриса. $HB = \dfrac{a}{2}$, $\angle HOB = \dfrac{1}{2}\angle AOB = \dfrac{1}{2}\angle AOB = 22°30'$.

3) Из $\Delta HOB$: $OH = \dfrac{HB}{\operatorname{tg}\angle HOB} = \dfrac{\frac{a}{2}}{\operatorname{tg}22°30'} = \dfrac{a}{2\operatorname{tg}22°30'}$.

4) $S_{\Delta AOB} = \dfrac{1}{2}AB \cdot OH = \dfrac{1}{2}a \cdot \dfrac{a}{2\operatorname{tg}22°30'} = \dfrac{a^2}{4\operatorname{tg}22°30'}$.

5) $V = 8 \cdot \dfrac{a^2}{4\operatorname{tg}22°30'} \cdot a = \dfrac{2a^3}{\operatorname{tg}22°30'}$.

(*Ответ*: $\dfrac{2a^3}{\operatorname{tg}22°30'}$.)

2. Доказать теорему об объеме пирамиды.

3. Решить задачу № 663 (г).

## II. Актуализация опорных знаний

Что называется цилиндром, осью цилиндра, высотой цилиндра? Что является разверткой боковой поверхности цилиндра? Что является основанием цилиндра? Что является осевым сечением цилиндра? Площадь поверхности цилиндра? Дайте определение многоугольника вписанного в окружность и описанного около окружности.

## III. Объяснение новой темы

1. Определение призмы, вписанной в цилиндр.

2. Определение призмы, описанной около цилиндра.

***Теорема.*** **Объем цилиндра равен произведению площади основания на высоту (рис. 4).**

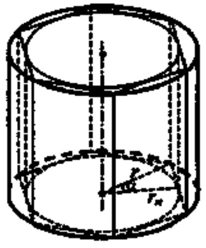


*Рис. 4*

*Дано*: цилиндр радиуса $r$ и высотой $h$.

*Доказать*: $V_{цил.} = S_{осн.} \cdot h$.

*Доказательство*: Введем следующие обозначения:

1) для цилиндра: $P$ – данный цилиндр, $r$ – его радиус, $S = \pi r^2$ – площадь основания, $h$ – высота, $V$ – объем.
2) для вписанной в цилиндр призмы: $F_n$ – вписанная правильная n-угольная призма, $S_n$ – площадь ее основания, h – высота (такая же, как у данного цилиндра).
3) для цилиндра, вписанного в призму $F_n$ : $P_n$ – вписанный цилиндр, $r_n$ – его радиус, $h$ – высота (такая же, как у данного цилиндра $P$ и призмы $F_n$), $V_n$ – объем. Впишем в данный цилиндр $P$ правильную n-угольную призму $F_n$, а в призму впишем цилиндр $P_n$. Объем призмы равен $S_n \cdot h$, тогда $V_n < S_n h < V$. Будем неограниченно увеличивать число $n$. Тогда $r_n \to r$ при $n \to \infty$. $r_n = r\cos\alpha = r\cos\frac{180°}{n} \to r$ при $n \to \infty$). Поэтому объем цилиндра $P_n$ стремится к объему цилиндра $P$. $\lim\limits_{n\to\infty} V_n = V$. Из неравенства следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} S_n \cdot h = V$, но $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \pi r^2$. Таким образом $V_{цил.} = \pi r^2 h = S_{осн.} \cdot h$.

## IV. Формирование умений и навыков учащихся

### *I уровень*

Решение задачи № 666 а), в).

а) *Дано*: цилиндр, $r = 2\sqrt{2}$ см, $h = 3$ см.

*Найти*: $V$.

*Решение*: $V = S \cdot h = \pi r^2 \cdot h = (2\sqrt{2})^2 \cdot 3 \cdot \pi = 24\pi$ (см$^3$). (*Ответ*: $24\pi$ см$^3$.)

в) *Дано*: цилиндр, $r = h$, $V = 8\pi$ см$^3$.

*Найти*: $h$.

*Решение*: $V = S \cdot h = \pi r^2 h$, так как $r = h$, то $V = \pi h^3 \Rightarrow h^3 = \frac{V}{\pi}$, $h = \sqrt[3]{\frac{8\pi}{\pi}} = \sqrt[3]{8} = 2$ (см). (*Ответ*: 2 см.)

### *II уровень*

– Какая из банок – широкая или узкая – вместительнее, если известно, что узкая втрое более высокая, но вдвое более узкая?

*Дано*: цилиндр $P_1$ и цилиндр $P_2$. $R_2 = 2r_1$, $h_1 = 3h_2$.

*Найти*: $V_1 : V_2$.

*Решение*: $V_1 = \pi r_1^2 \cdot h_1$, $V_2 = \pi\ r_2^2 \cdot h_2$. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{\pi r_1^2 h_1}{\pi r_2^2 h_2} = \frac{\pi r_1^2 3h_2}{\pi (2r_1)^2 h_2} = \frac{\pi r_1^2 3h_2}{\pi 4r_1^2 h_2} = \frac{3}{4}$.

(*Ответ*: объем второй банки больше в $\frac{4}{3}$ раза объема первой банки.)

***Задача № 667.***

*Решение*: $m = V \cdot \rho$, $m = 6{,}8$ кг $= 6800$ г, $r \approx 2{,}6$ г/см$^3$. $6800 = V \cdot 2{,}6$, $V \approx 2615{,}4$ см$^3$, $d = 4$ мм $\Rightarrow r = 2$ мм $= 0{,}2$ см. $V = S_{осн.} \cdot h = \pi r^2 h \Rightarrow h =$ $= \frac{V}{\pi r^2} \approx \frac{2615{,}4}{3{,}14 \cdot 0{,}2^2} \approx 20813$ см $\approx 208$ м. (*Ответ*: $\approx 208$ м.)

***Задача № 668.***

*Решение*: Найдем объем цистерны. $V = \pi r^2 \text{h} = \pi \cdot 9^2 \cdot 7 \approx 1780$ м$^3$. $0{,}85$ г/см$^3 = \frac{0{,}85 \cdot 0{,}001 \text{ кг}}{0{,}000001 \text{ м}^3} = 850$ кг/м$^3$. $m = V\rho = 1780 \cdot 850 \approx 1513000$ кг $\approx$ $\approx 1513$ т. (*Ответ*: $\approx 1513$ т.)

***III уровень***

***Задача № 671 д)*** и задача по готовому чертежу или слайду (рис. 5).

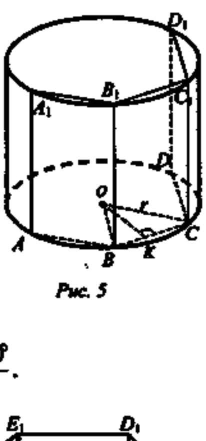



*Рис. 5*

*Решение*:

1) $ABCD...A_1B_1C_1D_1$ – правильная $n$-угольная призма, вписанная в цилиндр; обозначим: $CC_1 = h$, $OB = r$, $P$ – периметр, $S$ – площадь основания призмы.

2) В $\Delta OKB$ имеем: $\angle BOK = \frac{180°}{n}$, $OK = r \cdot \cos\frac{180°}{n}$,

$BK = r \cdot \sin\frac{180°}{n}$, поэтому $BC = 2r \cdot \sin\frac{180°}{n}$.

3) $P = n \cdot 2r \cdot \sin\frac{180°}{n}$, $S = \frac{1}{2} P \cdot OK = \frac{1}{2} n \cdot r^2 \cdot \sin\frac{360°}{n}$.

4) $\frac{V_{призмы}}{V_{цилиндра}} = \frac{\frac{1}{2} n r^2 h \sin\frac{360°}{n}}{\pi r^2 h} = \frac{n}{2\pi} \cdot \sin\frac{360°}{n}$.

(*Ответ*: $\frac{n}{2\pi} \cdot \sin\frac{360°}{n}$.)

Далее рассмотреть следующую задачу.

*Дана* правильная шестиугольная призма $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, точка $O$ – центр ее основания, $BE_1 = 8$, $\angle E_1BE = 60°$.

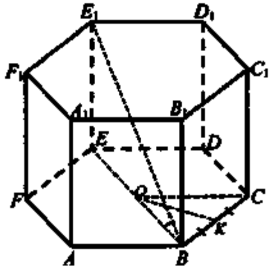



*Рис. 6*

*Найдите*: а) объем призмы; б) объем описанного около призмы цилиндра; в) объем вписанного в призму цилиндра (рис. 6).

*Решение*: (слайд или готовый чертеж) а) $V_{пр.} = S_{осн.} \cdot h$.

1) Из $\Delta BEE_1$ найдем $EE_1$. $EE_1 = BE_1 \cdot \sin 60^\circ = 8 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$. $h = EE_1 = 4\sqrt{3}$.

$BE = BE_1 \cdot \cos 60^\circ = 8 \cdot \dfrac{1}{2} = 4$. $OB = \dfrac{1}{2} BE = 2$.

2) Из $\Delta OBK$: $\angle OBK = 60^\circ$, $OK = r$. $OK = OB \cdot \sin 60^\circ = 2 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$.

$BK = OB \cdot \cos 60^\circ = 2 \dfrac{1}{2} = 1$. $BC = 2BK = 2$.

3) $S_{осн.} = 6S_{\Delta OBC} = 6 \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = 6 \cdot \dfrac{2^2\sqrt{3}}{4} = 6\sqrt{3}$. $V_{пр.} = 6\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{3} = 72$.

б) $V_{цил.оп.} = S_{осн.} \cdot h$, $S_{осн.} = \pi r^2$, $r = OB = 2$, $h = 4\sqrt{3}$. $V_{цил.оп.} = \pi \cdot 2^2 \cdot$ $\cdot 4\sqrt{3} = 16\pi\sqrt{3}$.

в) $V_{цил.вп.} = S_{осн.} \cdot h$, $S_{осн.} = \pi r^2$, $r = OK = \sqrt{3}$, $h = 4\sqrt{3}$. $V_{цил.вп.} =$ $= \pi \cdot (\sqrt{3})^2 \cdot 4\sqrt{3} = 12\sqrt{3}\,\pi$.

(*Ответ*: 72; $16\pi\sqrt{3}$; $12\pi\sqrt{3}$.)

**V. Подведение итогов**

– Напишите формулу для определения объема цилиндра.
– Итак, мы доказали теорему об объеме цилиндра и еще раз убедились в практической необходимости умения вычислять объемы тел, зная их размеры.

---

**Домашнее задание**

П. 66, № 666 *б*), 669, 671 *а*), *б*).

Во сколько раз надо увеличить высоту цилиндра, если его радиус уменьшили в *а* раз, чтобы объем остался прежним.

## Урок 38. Объем цилиндра

*Цели урока*:
– повторить тему об объеме цилиндра;
– выработать навыки решения задач с помощью формулы объема цилиндра.

### Ход урока

**I. Актуализация опорных знаний**

1. Доказательство теоремы об объеме цилиндра;

2. Решение задачи № 669 из домашней работы;

3. Решение задачи № 671 (г) параллельно с доской.

***Задача № 669.*** *Дано*: цилиндр, $S_{осн.} = Q$, $S_{сеч.} = S$ (рис. 1).

*Найти*: V.

*Решение*: $V = S_{осн.} \cdot h$, $S_{осн.} = \pi r^2$, $r = \sqrt{\frac{S_{осн.}}{\pi}} = \sqrt{\frac{Q}{\pi}}$, $r = AO$. $S_{сеч.} = AD \cdot DC$, $AD = 2r$, $DC = h$, т.е. $S_{сеч.} = 2r \cdot h$, $h = \frac{S}{2\sqrt{\frac{Q}{\pi}}}$, $h = \frac{S\sqrt{Q\pi}}{2Q}$,

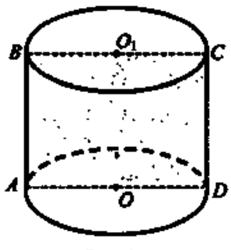


*Рис. 1*

$$V = Q \cdot \frac{S\sqrt{Q\pi}}{2Q} = \frac{1}{2}S\sqrt{Q\pi}.\ (\textit{Ответ}: \frac{1}{2}S\sqrt{Q\pi}.)$$

**II. Формирование умений и навыков учащихся**

***Задача № 671 г).*** *Дано*: цилиндр, вписанная n-угольная призма, $n = 8$ (рис. 5 урок № 37).

*Найти*: $\frac{V_{пр.}}{V_{цил.}}$.

*Решение*: $\angle BOC = \frac{360°}{8} = 45°$. $S_{\Delta BOC} = \frac{1}{2} OB \cdot OC \cdot \sin\angle BOC = \frac{1}{2} r^2 \cdot \sin 45° = \frac{1}{2} r^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{r^2\sqrt{2}}{4}$. $S_{осн.пр.} = 8S_{\Delta BOC} = 8 \cdot \frac{r^2\sqrt{2}}{4} = 2r^2\sqrt{2}$. $V_{пр.} = S_{осн.} \cdot h = 2r^2h\sqrt{2}$. $V_{цил.} = \pi r^2 h$. $\frac{V_{пр.}}{V_{цил.}} = \frac{2r^2h\sqrt{2}}{\pi r^2 h} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}$. (*Ответ*: $\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$.)

**III. Самостоятельная работа (20–25 мин.)** (см. приложение)

*Ответы:*

*I уровень:* I вариант: № 1. $108 + 36\sqrt{2}$. № 2. $128\pi$; II вариант: № 1. $864\sqrt{3}$. № 2. $54\pi$.

*II уровень:* I Вариант: № 1. $768\sqrt{3}$. № 2. $3\pi R^3$; II Вариант: № 1. 125. № 2. $3468\pi$.

*III уровень:* I Вариант: № 1. 50 см$^3$. № 2. $\frac{\pi a^3}{4}\sin^2\beta\cos\beta$; II Вариант: № 1. 4 см. № 2. $\frac{\pi l^3}{4}\sin^2\alpha\cos\alpha$.

**IV. Подведение итогов**

– Какие данные необходимо иметь для определения объема цилиндра?

Собрать тетради с самостоятельными работами, сообщить правильные ответы.

---

**Домашнее задание**

П. 66, № 670, 672, 745.

*Решение задач самостоятельной работы.*

***I уровень***

***Вариант I***

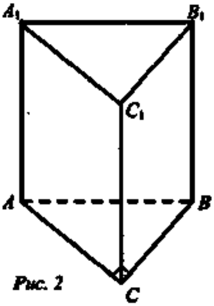


*Рис. 2*

*№ 1. Дано*: $ABCA_1B_1C_1$ – прямая призма, $\angle C = 90°$, $AC = 6$ см, $\angle BAC = 45°$, $V_{пр.} = 108$ см$^3$ (рис. 2).

*Найти*: $S_{полн.}$

*Решение*:

1) $S_{полн.} = S_{бок.} + 2S_{осн.}$ $S_{бок.} = P \cdot h$, $h - ?$, $P - ?$

$$S_{осн.} = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}AC \cdot BC; BC - ?$$

2) Рассмотрим $\Delta ABC$ – прямоугольный по условию, $\angle BAC = 45° \Rightarrow \Delta ABC$ равнобедренный $BC = AC = 6$ см. $S_{осн.} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 = 18$ (см$^2$), $2S_{осн.} =$

$$= 36 \text{ см}^2. AB = \frac{AC}{\sin \angle ABC}, \ AB = \frac{6}{\sqrt{2}/2} = 6\sqrt{2} \text{ (см)}.$$

3) Найдем периметр основания: $P = 2 \cdot 6 + 6\sqrt{2} = 12 + 6\sqrt{2}$ (см).

4) Из формулы для вычисления объема прямой призмы выражаем высоту призмы и находим ее $V_{пр.} = S_{осн.} \cdot h$, $h = \frac{V_{пр.}}{S_{осн.}}$, $h = \frac{108}{18} = 6$ (см).

5) $S_{бок.} = (12 + 6\sqrt{2}) \cdot 6 = 72 + 36\sqrt{2}$ (см$^2$).

6) $S_{полн.} = 72 + 36\sqrt{2} + 36 = 108 + 36\sqrt{2}$ (см$^2$).

(*Ответ*: $(108 + 36\sqrt{2})$ см$^2$.)

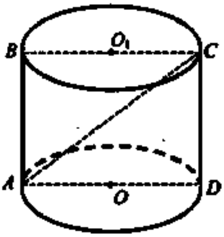


*Рис. 3*

*№ 2. Дано*: цилиндр, $ABCD$ – осевое сечение, $ABCD$ – квадрат, $AC = 8\sqrt{2}$ см. (рис. 3).

*Найдите*: $V_{цил.}$

*Решение*:

1) $V_{цил.} = S_{осн.} \cdot h$.

2) Рассмотрим $\Delta ABC$ – прямоугольный, так как $ABCD$ квадрат. Пусть $AB = BC = X$ см, тогда $x^2 + x^2 = (8\sqrt{2})^2$, $2x^2 = 64 \cdot 2$, $x^2 = 64$, $x = \pm 8$, $x = -8$ не удовлетворяет условию задачи. Итак: $AB = BC = 8$ см, т.е. $h = 8$ (см).

3) Найдем радиус основания: $r = \frac{1}{2}AD = 4$ см, тогда $S_{осн.} = \pi r^2$. $S_{осн.} =$ $= 16\pi$ см$^2$.

4) $V = 16\pi \cdot 8 = 128$ (см$^3$).

(*Ответ*: 128 см$^3$.)

***Вариант II***

***№ 1. Дано***: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямая призма, $BB_1D_1D$ – диагональное сечение, $ABCD$ – ромб; $BB_1D_1D$ – квадрат. $AB = 12$ см, $\angle BAD = 60°$ (рис. 4).

**Найдите объем призмы.**

***Решение***:

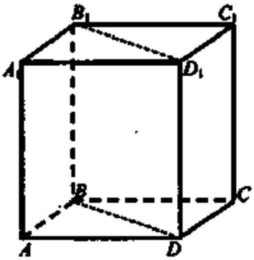


*Рис. 4*

1) $V_{пр.} = S_{осн.} \cdot h$.

2) $S_{осн.} = a^2 \sin\angle BAD$. $S_{осн.} = 12^2 \cdot \sin 60° =$ $= 144 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 72\sqrt{3}$ (см$^2$).

3) Рассмотрим $\Delta ABD$.

$$\left.\begin{array}{l} AB = AD \\ \angle BAD = 60° \end{array}\right\} \Rightarrow \angle ABD = \angle ADB = 60°,$$

т.е. $\Delta ABD$ – равносторонний, $BD = 12$ см.

4) Диагональное сечение $BB_1D_1D$ является квадратом, т.е. $h = BB_1 =$ $= BD = 12$ см.

5) Находим объем призмы. $V = 72\sqrt{3} \cdot 12 = 864\sqrt{3}$ (см$^3$).

(*Ответ*: $864\sqrt{3}$ см$^3$.)

***№ 2. Дано***: цилиндр, $ABCD$ – осевое сечение, $ABCD$ – квадрат, $AC = 6\sqrt{2}$ см (рис. 3).

***Найдите***: $V_{цил.}$

***Решение***:

1) $V_{цил.} = S_{осн.} \cdot h$.

2) Рассмотрим $\Delta ABC$ – прямоугольный и равнобедренный, так как $ABCD$ – квадрат. Обозначим $AB = BC = x$ см, тогда $x^2 + x^2 = (6\sqrt{2})^2$, $2x^2 = 36 \cdot 2$, $x^2 = 36$, $x = \pm 6$. $x = -6$ не удовлетворяет условию задачи, т.е. $AB = BC = 6$ см, и так $h = 6$ см.

3) Найдем радиус основания $r = \frac{1}{2}AD = 3$ см, $S_{осн.} = \pi r^2$, $S_{осн.} = 9\pi$ см$^2$.

4) $V = 9\pi \cdot 6 = 54\pi$ (см$^3$).

(*Ответ*: $54\pi$ см$^3$.)

***II уровень***

***Вариант I***

***№ 1. Дано***: $ABCA_1B_1C_1$ – прямая призма, $AB = BC = 10$ см, $AC = 12$ см, $K$ – середина ребра, $\angle KDB = 60°$ (рис. 5).

***Найти***: $V_{пр.}$

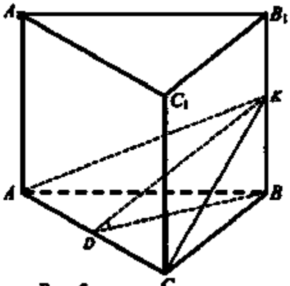



*Рис. 5*

*Решение:*

1) Рассмотрим получившееся сечение: $\Delta AKC$ и определим угол между плоскостью $(AKC)$ и плоскостью основания. В $\Delta ABC$ проведем $BD \perp AC$, тогда $AC \perp KD$ (теорема о трех перпендикулярах). $\angle KDB$ и есть линейный угол двугранного угла между плоскостью $(AKC)$ и плоскостью основания; $\angle KDB = 60°$.

2) $V_{пр.} = S_{осн.} \cdot h$.

3) Найдем площадь основания. $S_{осн.} = \dfrac{1}{2}ah$.

Рассмотрим $\angle ABC$: равнобедренный, поэтому $BD$ – высота, медиана и биссектриса треугольника, т.е. $AD = DC = 6$ см. Далее из $\angle BDC$ по теореме Пифагора находим высоту треугольника $ABC$: $h = BD = \sqrt{BC^2 - DC^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$ (см). $S_{осн.} = \dfrac{1}{2} \cdot 12 \cdot 8 = 48$ (см$^2$). (Для вычисления площади $\Delta ABC$ можно воспользоваться формулой Герона.)

4) Найдем высоту призмы $BB_1$.

Рассмотрим $\Delta BDK$ – прямоугольный, $\angle BDK = 60°$. $BK = BD\text{tg}60° = 8\sqrt{3}$ (см). $h = BB_1 = 2BK = 16\sqrt{3}$ см.

5) $V_{пр.} = S_{осн.} \cdot h$. $V_{пр.} = 48 \cdot 16\sqrt{3} = 768\sqrt{3}$ (см$^3$).

(*Ответ*: $768\sqrt{3}$ см$^3$.)

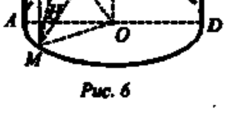



*Рис. 6*

**№ 2.** *Дано*: цилиндр. $(MNKL) \parallel OO'$, $\cup MAL = 120°$, $AO = R$, $\angle MKL = 30°$ (рис. 6).

*Найти*: $V_{цил.}$

*Решение*:

1) $V = S_{осн.} \cdot h$. $S_{осн.} = \pi R^2$,

2) Из $\Delta MOL$ найдем $ML$: $\angle MOL = \cup MAL = 120°$. $\Delta MOL$ – равнобедренный, проведем $OA \perp ML$. $OA \cap ML = H$, $OH$ – высота, медиана и биссектриса $\Delta MOL$.

$$\angle HOL = 60°,\ HL = OL\sin 60° = R\frac{\sqrt{3}}{2},\ ML = R\sqrt{3}.$$

3) Высоту цилиндра находим из $\Delta MKL$: $KL = ML\text{ctg}\angle MKL = R\sqrt{3}\,\text{ctg}30° = R\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3R$, т.е. $H = 3R$.

4) Находим объем цилиндра. $V = \pi R^2 \cdot 3R = 3\pi R^3$.

(*Ответ*: $3\pi R^3$.)

*Вариант II*

№ *1*. *Дано*: $ABCA_1B_1C_1$ – прямая призма. $AB = BC = 10$, $\angle ABC = 30°$. $(AA_1H_1H) \perp (CC_1B_1B)$. $\angle AHA_1 = 45°$ (рис. 7).

*Найти*: $V_{пр.}$

*Решение*:

1) $V_{пр.} = S_{осн.} \cdot h$.
2) $(AA_1H_1H) \perp (CC_1B_1B) \Rightarrow \angle AHC = 90°$.
3) Рассмотрим $\Delta ABH$: $\angle AHB = 90°$, $\angle ABH = 30°$. Найдем $AH$. $AH = \frac{1}{2}AB$ (катет, лежащий против угла в 30°), $AH = 5$.

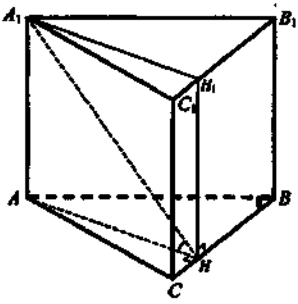


*Рис. 7*

4) Из $\Delta AA_1H$ находим высоту призмы. $h = AA_1$. $\Delta AA_1H$ – прямоугольный и равнобедренный, т.е. $AA_1 = AH = 5$.
5) $S_{осн.} = \frac{1}{2}AB \cdot BC \cdot \sin 30° = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 10 \cdot \frac{1}{2} = 25$.
6) $V_{пр.} = 25 \cdot 5 = 125$.

(*Ответ*: 125.)

№ *2*. *Дано*: цилиндр $(MNKL) \parallel OO'$, $OH = 15$ см, $MK = 20$ см, $r = 17$ см (рис. 8).

*Найдите*: $V_{цил.}$

*Решение*:

1) Рассмотрим получившееся сечение: так как плоскость параллельна оси цилиндра, то $MN \parallel OO'$ и $KL \parallel OO'$, т.е. $MN \parallel KL$; $OO' \perp$ основанию $\Rightarrow MN \perp$ основанию и $KO \perp$ основанию, кроме того $NK \parallel ML$ – лежат в параллельных плоскостях, таким образом четырехугольник $MNKL$ – прямоугольник.

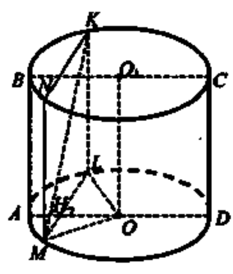


*Рис. 8*

2) $V_{цил.} = \pi r^2 h$, $r = 17$ см, т.е. $V = 289\pi h$ см$^3$.
3) Рассмотрим $\Delta MOL$: проведем $OH \perp ML$; $OH$ и есть расстояние от плоскости сечения до оси цилиндра, т.е. $OH = 15$ см. $OH$ – высота, медиана и биссектриса равнобедренного $\Delta MOL$, $HL = \frac{1}{2}ML$. $HL = \sqrt{OL^2 - OH^2} = \sqrt{17^2 - 15^2} = 8$ (см), $ML = 16$ см.
4) Находим высоту цилиндра из прямоугольного $\Delta MKL$: $h = KL = \sqrt{MK^2 - ML^2} = \sqrt{20^2 - 16^2} = 12$ (см).
5) $V = 289\pi \cdot 12 = 3468\pi$ (см$^3$).

(*Ответ*: $3468\pi$ см$^3$.)

### *III уровень*

*Вариант I*

№ *1*. *Дано*: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямая призма, $ABCD$ – трапеция, $S_{BB_1C_1C} = 8$ см$^2$, $S_{AA_1D_1D} = 12$ см$^2$, $BH = 5$ см (рис. 9).

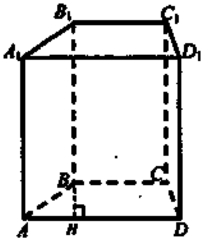


Рис. 9

*Найти*: $V_{пр.}$

*Решение*:

1) Расстояние между параллельными плоскостями $BB_1C_1$ и $AA_1D_1$ есть длина перпендикуляра $BH$, который является высотой трапеции $ABCD$.
2) Обозначим верхнее основание трапеции – $a$, нижнее – $b$, высоту призмы $h$, тогда $S_{BB_1C_1C} = ah, 8 = ah, \quad a = \frac{8}{h}; \quad S_{AA_1D_1D} = bh,$

$12 = bh, b = \frac{12}{h}$;

3) $S_{осн.} = \frac{1}{2}(AD + BC) \cdot BH, S_{осн.} = \frac{1}{2}(\frac{8}{h} + \frac{12}{h}) \cdot 5 = \frac{50}{h}$.

4) $V_{пр.} = S_{осн.} \cdot h. V_{пр.} = \frac{50}{h} \cdot h = 50$ (см$^3$).

(*Ответ*: 50 см$^3$.)

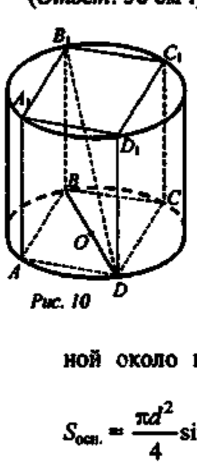


Рис. 10

*№ 2.* Дано: цилиндр, $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – вписанная, правильная четырехугольная призма, $B_1D = d$, $\angle DB_1B = \beta$ (рис. 10).

*Найти*: $V_{цил.}$

*Решение*:

1) $V_{цил.} = S_{осн.} \cdot h$.
2) Из прямоугольного треугольника $BB_1D$ найдем высоту цилиндра: $h = BB_1 = B_1D\cos\beta$, $h = d\cos\beta$.
3) $S_{осн.} = \pi r^2$. Из $\Delta BB_1D$ находим катет $BD$, который будет являться диаметром окружности описанной около квадрата $ABCD$. $BD = d\sin\beta$, $r = BO = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2}d\sin\beta$.

$S_{осн.} = \frac{\pi d^2}{4}\sin^2\beta$.

4) $V_{цил.} = \frac{\pi d^2}{4}\sin^2\beta \cdot (d\cos\beta) = \frac{\pi d^3}{4}\sin^2\beta\cos\beta$.

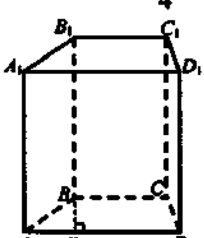


Рис. 11

(*Ответ*: $\frac{\pi d^3}{4}\sin^2\beta\cos\beta$.)

***Вариант II***

*№ 1. Дано*: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямая призма, $ABCD$ – трапеция. $V_{пр.} = 40$ см$^3$, $S_{BB_1C_1C} = 6$ см$^2$, $S_{AA_1D_1D} = 14$ см$^2$ (рис. 11).

*Найдите*: $BH$.

*Решение*:

1) Расстояние между параллельными плоскостями $BB_1C_1$ и $AA_1D_1$ есть длина перпендикуляра $BH$, который является также высотой трапеции $ABCD$.
2) Обозначим: $a$ – верхнее основание трапеции, $b$ – нижнее основание, $h$ – высота призмы, тогда $S_{BB_1C_1C} = ah$, $6 = ah$, $a = \frac{6}{h}$. $S_{AA_1D_1D} = bh$, $14 = bh$, $b = \frac{14}{h}$. $S_{осн.} = \frac{1}{2}(BC + AD) \cdot BH$, $S_{осн.} = \frac{1}{2}(\frac{6}{h} + \frac{14}{h}) \cdot BH = \frac{10BH}{h}$.
3) $V_{пр.} = S_{осн.} \cdot h$, $40 = \frac{10BH}{h} \cdot h$, $BH = 4$ см.

(*Ответ*: 4 см.)

№ 2. *Дано*: цилиндр. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ – правильная шестиугольная вписанная призма. $AD_1 = l$, $\angle AD_1D = \alpha$ (рис. 12).

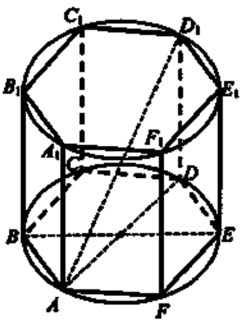


*Рис. 12*

*Найти*: $V_{цил.}$

*Решение*:

1) $V_{цил.} = S_{осн.} \cdot h$.
2) Из $\Delta AD_1D$: $DD_1 = l\cos\alpha$, т.е. $h = l\cos\alpha$.
3) $S_{осн.} = \pi r^2$. Из $\Delta AD_1D$ находим катет $AD$, который является диагональю правильного шестиугольника и диаметром окружности: $AD = l\sin\alpha$, $r = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}l\sin\alpha$. $S_{осн.} = \frac{\pi l^2}{4}\sin^2\alpha$.
4) $V_{цил.} = \frac{\pi l^2}{4}\sin^2\alpha \cdot (l\cos\alpha) = \frac{\pi l^3}{4}\sin^2\alpha\cos\alpha$.

(*Ответ*: $\frac{\pi l^3}{4}\sin^2\alpha\cos\alpha$.)

## § 3. Объем наклонной призмы, пирамиды и конуса (уроки 39–46)

### Урок 39. Вычисление объемов тел с помощью интеграла

*Цель урока:*

– разъяснить учащимся возможность и целесообразность применения определенного интеграла для вычисления объемов тел.

## Ход урока

**I. Организационный момент**

**II. Вывод формулы для вычисления объемов тел, основанной на понятии интеграла**

1) Пусть тело $T$, объем которого надо вычислить, заключено между двумя параллельными плоскостями $\alpha$ и $\beta$. Введем систему координат: – ось $ox$ перпендикулярна $\alpha$ и $\beta$; $a$ и $b$ – абсциссы точек пересечения оси $ox$ с этими плоскостями ($a < b$).

Рис. 1 на слайде (или заготовка на ватм. листе).

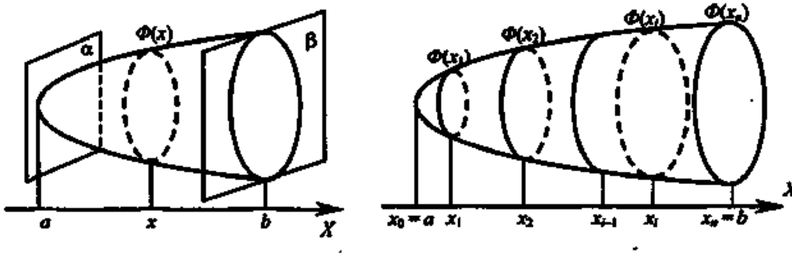



*Рис. 1*

Считаем, что сечение $\Phi_{(x)}$ плоскостью, проходящей через точку с абсциссой $x$ и перпендикулярно к оси $ox$, является кругом, либо многоугольником для любого $x \in [a, b]$ (при $a = x$ и $b = x$ в сечение может вырождаться точка, например, при $x = a$).

2) Пусть $S(x)$ – площадь $\Phi(x)$, зависимости $S(x)$ – непрерывная функция на числовом отрезке $[a, b]$. Разобьем отрезок $[a, b]$ на n равных отрезков точками $a = x_0; x_1, \ldots x_i \ldots x_n = b$ и через точки с абсциссами $x_i$ проведем плоскости, перпендикулярные $ox$. Они разобьют тело $T$ на $n$ тем: $T_1, \ldots, T_n$; – если сечение $\Phi(x_i)$ – круг, то $V_{Ti} \approx V_{\text{цилиндра}}$ с основанием $\Phi(x_i)$ и высотой $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \dfrac{b-a}{n}$; – если $\Phi(x_i)$ – многоугольник, то $V_{Ti} \approx V_{\text{прямой призмы}}$ с основанием $\Phi(x_i)$ и высотой $\Delta x_i$.

В любом случае: $V_{Ti} \approx S(x_i) \cdot \Delta x_i$,

$$V_T \approx V_n = \sum_{i=1}^{n} S(x_i)\Delta x_i.$$

Приближенное значение $V_n$ объема тела $T$ точнее с увеличением n и уменьшением $\Delta x_i$.

3) Причем $\lim\limits_{n \to \infty} V_n = V_{\text{тела}}$.

С другой стороны: сумма $V_n$ – интегральная сумма для непрерывной функции $S(x)$ на числовом отрезке $[a, b]$.

$$\lim_{n\to\infty} V_n = \int_a^b S(x)\cdot dx.$$

Таким образом, получаем: $V = \int_a^b S(x)\cdot dx$, – основная формула для вычисления объемов тел.

**III. Отработка навыков по нахождению объемов тел с помощью интеграла**

Решение задач: № 673, 674.

***Задача № 673.***

Сечение тела, изображенного на рисунке 175 плоскостью, перпендикулярной к оси $ox$ и проходящей через точку с абсциссой $x$, является квадратом, сторона которого $\frac{1}{x}$. Найти объем этого тела (рис. 2).

*Дано*: квадрат; $a = \frac{1}{x}$. $\alpha \perp ox$.

*Найти*: $V_т$.

*Решение*:

$V_т$ найдем по основной формуле:

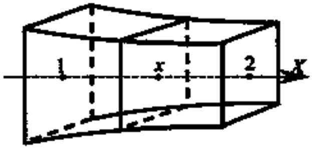



*Рис. 2*

$V = \int_1^2 S(x)\cdot dx$, $S(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^2 = \frac{1}{x^2}$, так как в сечение квадрат.

$V = \int_1^2 \frac{1}{x^2}\cdot dx = -\frac{1}{x}\Big|_1^2 = -\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{1}\right) = \frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2} = 0,5$. (*Ответ*: V = 0,5.)

***Задача № 674.***

Фигура, заштрихованная на рис. 176 вращается вокруг оси $ox$. Найти объем полученного тела (рис. 3).

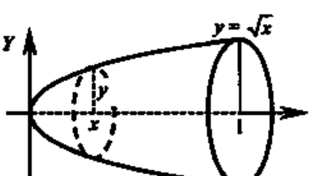



*Рис. 3*

*Решение*: $V = \int_0^1 S(x)\cdot dx$, $S(x) = \pi y^2(x)$. $y = \sqrt{x}$. $S(x) = \pi(\sqrt{x})^2 = \pi x$,

$V = \int_0^1 \pi x\cdot dx = \pi\frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = = \frac{\pi\cdot 1}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$. (*Ответ*: V = $\frac{\pi}{2}$.)

**IV. Устная работа (по готовым чертежам)**

Выполняется по группам, проверяется защитой одним из представителей группы у доски (можно на скорость, по принципу соревнования).

Можно сделать запись в тетрадь каждой задачи.

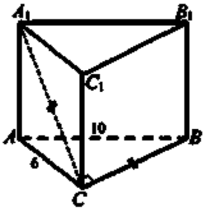



*Рис. 4*

1) *Дано*: $ABCA_1B_1C_1$ – прямая призма, $\angle ACB = 90°$, $AB = 10$, $AC = 6$, $A_1C_1 = CB$ (рис. 4).

*Найти*: $V_{пр.}$

*Решение*: $V = AA_1 \cdot S_{\Delta ABC}$. $BC = \sqrt{100-36} = 8$ (по теореме Пифагора). $S_\Delta = \frac{1}{2} 6 \cdot 8 = 24$; $AA_1 = \sqrt{64-36} = 2\sqrt{7}$. $V = 24\sqrt{7} \cdot 2 = 48\sqrt{7}$. (*Ответ*: $48\sqrt{7}$.)

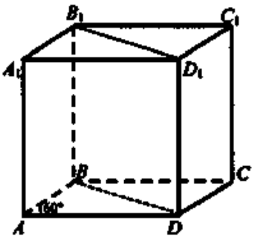



*Рис. 5*

2) *Дано*: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямая призма, $ABCD$ – ромб, $AD = 12$, $\angle BAD = 60°$, $B_1BDD_1$ – квадрат (рис. 5).

*Найти*: $V_{пр.}$

*Решение*: $V = BB_1 \cdot S_{ABCD}$. $BB_1 = BD$ (по определению квадрата), $\Delta ABD$ – равносторонний ($\angle A = 60°$, $AB = AD$): $BD = AD = 12$, $BB_1 = AD = 12$. $S_{ABCD} = 12 \cdot 12 \cdot \sin 60° = \frac{144\sqrt{3}}{2} = 72\sqrt{3}$. $V = 12 \cdot 72\sqrt{3} = 864\sqrt{3}$. (*Ответ*: $864\sqrt{3}$.)

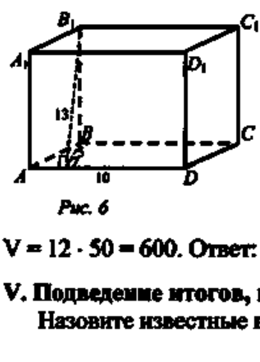



*Рис. 6*

3) *Дано*: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямая призма, $ABCD$ – ромб, $AD = 10$, $BK \perp AD$, $BK = 5$, $B_1K = 13$ (рис. 6).

*Найти*: $V_{пр.}$

*Решение*: $V_{пр.} = BB_1 \cdot S_{ABCD}$, $BB_1 = \sqrt{169-25} = 12$ (по теореме Пифагора), $S_{ABCD} = 5 \cdot 10 = 50$; $V = 12 \cdot 50 = 600$. Ответ: 600.

**V. Подведение итогов, вывод, оценки**

Назовите известные вам способы вычисления объемов тел.

---

**Домашнее задание**

П. 67 (вывод формулы), № 675.

## Урок 40. Объем наклонной призмы

*Цели урока:*

– вывести формулу объема наклонной призмы с помощью интеграла;
– показать применение полученной формулы для решения задач;
– сформировать навык по нахождению объема наклонной призмы.

### Ход урока

**I. Организационный момент**

Проверка домашнего задания. Вывод формулы у доски.

**II. Теорема об объеме наклонной призмы**

**Объем наклонной призмы равен произведению площади основания на высоту.**

*Доказательство*:

Рис. 1 на слайде (или ватм. лист).

$V = (S_1 + S_2 + S_3) \cdot h = S \cdot h$.

1) Рассмотрим треугольную призму с объемом V и площадью основания $S$, высотой $h$.

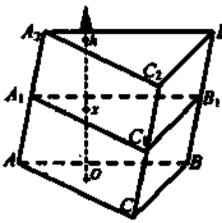



Рис. 1 а)

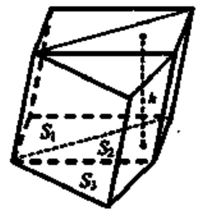



Рис. 1 b)

Точка $O$ принадлежит одному из оснований призмы, направим ось $ox$ перпендикулярно основаниям. Рассмотрим сечение призмы плоскостью, перпендикулярной к оси $ox$ и, значит, параллельно плоскости основания.

$x$ – абсцисса точки пересечения этой плоскости с осью $ox$, площадь полученного сечения – $S(x)$.

$\Delta ABC$ (основание призмы) = $\Delta A_1B_1C_1$ (сечение призмы), так как $AA_1B_1B$ – параллелограмм ($AA_1 = BB_1$, $AA_1 \parallel BB_1$, $A_1B_1 = AB$).

Аналогично: $B_1C_1 = BC$, $A_1C_1 = AC$, значит, равенство треугольников вытекает по 3 признаку (3 стороны);

$S(x) = S$.

По основной формуле:

$$V = \int_0^h S(x)dx = \int_0^h Sdx = S\int_0^h dx = Sx\Big|_0^h = S \cdot h = S \cdot O = S \cdot h = V.$$

2) Докажем для любой призмы с высотой $h$ и площадью основания $S$.

Разбиваем призму на 3 призмы с общей высотой $h$. Выразим объем каждой призмы и сложим их. Вынося $h$ за скобки, получаем сумму площадей оснований 3-угольных призм, т.е. площадь основания исходной призмы. Имеем: $V = S \cdot h$.

**III. Решение задач: № 682, 680, 676.**

Дома: п. 68, № 681, 683.

***Решение задач у доски.***

***Задача № 676.***

Найти объем наклонной призмы, у которой основанием является треугольник со сторонами 10 см, 10 см, 12 см, а боковое ребро равное 8 см, составляет с плоскостью основания угол 60°.

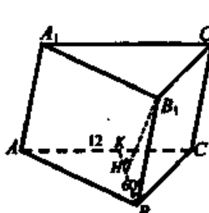



Рис. 2

*Дано*: $ABCA_1B_1C_1$ – наклонная призма, $AB = 10$ см, $BC = 10$ см, $AC = 12$ см, $BB_1 = 8$ см, $\angle B_1BK = 60°$ (рис. 2).

*Найти*: $V_{пр.}$ – ?

*Решение.*

1) $V_{пр.} = S_{осн.} \cdot h$; $S_{осн.} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c}$ (ф-ла Герона).

$S_{осн.} = \sqrt{16 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 6} = 4 \cdot 2 \cdot 6 = 48$ (см$^2$).

2) $\Delta BB_1H$ – прямоугольный, так как $B_1H$ – высота. $B_1H = BB_1 \cdot \sin 60°$;

$B_1H = 8 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$ (см).

3) $V_{пр.} = 4 \cdot \sqrt{3} \cdot 48 = 192\sqrt{3}$ (см$^3$).

(*Ответ*: $V_{пр.} = 192\sqrt{3}$ см$^3$.)

***Задача № 680.***

Основанием наклонной призмы является прямоугольник со сторонами $a$ и $b$. Боковое ребро длины $c$ составляет со смежными сторонами основания углы, равные φ. Найти объем призмы.

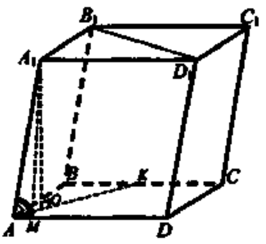


*Рис. 3*

*Дано*: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – призма, $ABCD$ – прямоугольник, $AB = a$, $AD = b$, $AA_1 = c$. $\angle A_1AD = \angle A_1AB = \varphi$ (рис. 3).

*Найти*: $V_{пр.}$

*Решение*:

1) $\angle A_1AD = \angle A_1AB$, значит, точка $A_1$ проецируется на биссектрису $\angle A$.

$A_1O \perp (ABC)$, $AO$ – биссектриса $\angle A$.

2) $\left.\begin{array}{l} A_1O \perp (ABC) \\ OM \perp AD \\ OM \text{ – проекция} \\ A_1M \text{ – наклонная} \end{array}\right| \Rightarrow A_1M \perp AD.$

3) $\Delta AA_1M$ – прямоугольный, $AM = C \cdot \cos\varphi$.

4) $\Delta AOM$ – прямоугольный, $AO = \sqrt{2}\,AM$, $AO = \sqrt{2} \cdot C \cdot \cos\varphi$.

5) $A_1O = \sqrt{c^2 - 2c^2 - \cos^2\varphi} = c\sqrt{1 - 2\cos^2\varphi} = c\sqrt{-\cos 2\varphi}$.

6) $V = S_{осн.} \cdot h = abc\sqrt{-\cos 2\varphi}$.

(*Ответ*: $V = abc\sqrt{-\cos 2\varphi}$.)

***Задача № 682.***

Объем наклонной призмы равен произведению бокового ребра на площадь сечения призмы, плоскостью, перпендикулярной к боковым ребрам и их пересекающей.

Или $V_{накл.пр.} = S_{ок.ребро} \cdot S_{сеч.}$ перпендикулярного ему сечения (рис. 4).

*Доказательство*:

1) $(MEK)$ – плоскость перпендикулярного сечения призмы, $(ABC)$ –

плоскость основания. $(MEK) \cap (ABC)$ по прямой $PQ$. $AA_1 \perp (MEK)$, $\Rightarrow AA_1 \perp PQ$.

2) Проведем высоту $A_1O$ – призмы, $A_1O \perp PQ$.

3) $\left.\begin{matrix} PQ \perp AA_1 \\ PQ \perp A_1O \end{matrix}\right\} \Rightarrow PQ \perp (OA_1A)$ (по признаку перпендикулярности прямой и плоскости).

4) $(AA_1O) \parallel PQ$ в точке $H$, $\angle AHM$ – линейный угол двугранного угла $AQPM$. $\angle AHM = \varphi$, тогда $\angle MAH = 90° - \varphi$.

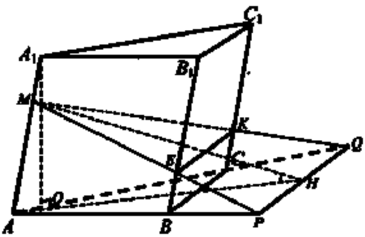


Рис. 4

5) $\Delta MEK$ – ортогональная проекция $\Delta ABC$ на плоскость перпендикулярного сечения. $S_{MEK} = S_{ABC} \cdot \cos\varphi$.

6) $(APQ) \perp (AMH)$, так как $(APQ)$ проходит через $PQ$, перпендикулярно $(AMH)$.

7) Из $\Delta AA_1O$: $A_1O = AA_1 \cdot \sin(90 - \varphi) = AA_1 \cdot \cos\varphi$.

8) $V = S_{ABC} \cdot A_1O = \dfrac{S_{MEK}}{\cos\varphi} \cdot AA_1 \cdot \cos\varphi = S_{MEK} \cdot AA_1$.

Что и требовалось доказать.

Произвольная призма состоит из треугольных призм, следовательно, $S_{сеч.} = \sum\limits_{i=1}^{n} Si$.

## IV. Групповая работа по готовым чертежам

Оценивается работа всей группы, задаются теоретические вопросы в качестве проверки знания теоретического материала и дополнительного задания.

1. *Дано*: $BB_1C_1C$ – ромб, $B_1C \perp (ABC)$, $B_1C = 3$, $\Delta ABC$ – равносторонний, $BB_1 = 5$ (рис. 5).

*Найти*: $V_{пр.}$

*Решение*:

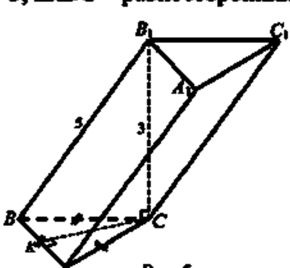


Рис. 5

1) $V_{пр.} = S \cdot h$; $BB_1 = BC$ (по условию).

2) $S_{осн.} = \dfrac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \cdot \sin 60°$; $S_{осн.} = \dfrac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 \cdot \sin 60° = \dfrac{25\sqrt{3}}{4}$.

3) $\angle B_1CK = 90°$ (по определению угла между прямой и плоскостью); $B_1C = 3$. $V_{пр.} = \dfrac{25\sqrt{3}}{4} \cdot 3 = \dfrac{75\sqrt{3}}{4}$.

(*Ответ*: $\dfrac{75\sqrt{3}}{4}$.)

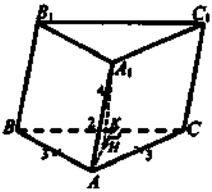


Рис. 6

2. *Дано*: $AB = AC = 3$ см; $BC = 2$ см; $AA_1 = 4$ см; $\angle A_1AH = 45^\circ$. $V_{пр.} = V_{куба}$ (рис. 6).

*Найти*: $a$ – ребро куба.

*Решение*:

1) $V_{пр.} = S_{осн.} \cdot h$; $S_{осн.} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ по формуле Герона; $S_{осн.} = \sqrt{4 \cdot 1^2 \cdot 2} = 2\sqrt{2}$ (см²).

2) $AK \perp BC$; $M \in AK$; $\Delta AA_1H$ – прямоугольный,

$$A_1H = A_1A \cdot \sin\angle A_1AK;\ A_1H = h = 4 \cdot \sin 45^\circ = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}\ (\text{см}).$$

3) $V_{пр.} = 2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} = 8$ (см³).

4) $V_K = V_{пр.}$; $V_K = a^3$; $a = \sqrt[3]{V_{куба}}$; $a = \sqrt[3]{8} = 2$ (см).

(*Ответ*: $a = 2$ см.)

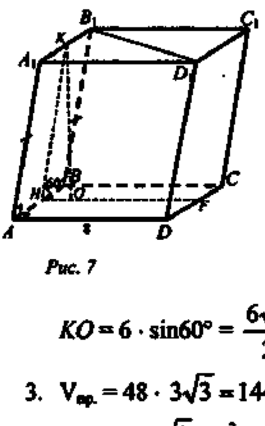


Рис. 7

3. *Дано*: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – призма; $ABCD$ – прямоугольник; $AB = 6$ см; $AD = 8$ см, $AA_1B_1B$ – квадрат; $\angle KHF = 60^\circ$ (рис. 7).

*Найти*: $V_{пр.}$ – ?

*Решение*:

1. $V_{пр.} = S_{осн.} \cdot h$; $S_{осн.} = AB \cdot AD$; $S_{осн.} = 6 \cdot 8 = 48$ (см²).
2. $KO$ – высота призмы; $\Delta KOH$ – прямоугольный, $KO = h = KH \cdot \sin\angle KHO$,

$$KO = 6 \cdot \sin 60^\circ = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}\ (\text{см}),\ KH = AA_1 = AB = 6\ \text{см}$$

3. $V_{пр.} = 48 \cdot 3\sqrt{3} = 144\sqrt{3}$ (см³).

(*Ответ*: $144\sqrt{3}$ см³.)

**V. Подведение итогов**

– Напишите формулу для определения объема наклонной призмы.

Проверка решений задач;

Выставление оценок.

## Урок 41. Объем пирамиды

*Цель урока*:

– вывести формулу объема пирамиды с использованием основной формулы объема тел.

### Ход урока

**I. Объяснение нового материала (п. 69.)**

Докажем теорему:

**Объем пирамиды равен одной трети, произведения площади основания на высоту.**

$$V = \frac{1}{3} S_{осн.} \cdot h.$$

*Доказательство*:

Сначала докажем теорему для треугольной пирамиды, затем для произвольной.

1. Рассмотрим треугольную пирамиду $OABC$ с объемом V, площадью основания $S$ и высотой $h$ (рис. 1). Проведем ось $ox$ ($OM_2$ – высота), рассмотрим сечение $A_1B_1C_1$ пирамиды плоскостью, перпендикулярной к оси $ox$ и, значит, параллельной плоскости основания. Обозначим через $x$ абсциссу точки $M_1$ пересечения этой плоскости с осью $ox$, а через $S(x)$ – площадь сечения. Выразим $S(x)$ через $S$, $h$ и $x$. Заметим, что $\Delta A_1B_1C_1 \propto ABC$.

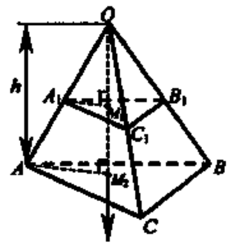


*Рис. 1*

В самом деле $A_1B_1 \parallel AB$, тогда $\Delta OA_1B_1 \propto \Delta OAB$, следовательно, $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{OA_1}{OA}$.

Прямоугольные треугольники $OA_1M_1$ и $OAM_2$ тоже подобны (они имеют общий острый угол с вершиной $O$). Поэтому $\frac{OA_1}{OA} = \frac{OM_1}{OM_2} = \frac{x}{h}$.

Таким образом, $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{x}{h}$.

Аналогично доказывается $\frac{A_1C_1}{AC} = \frac{x}{h}$; $\frac{B_1C_1}{BC} = \frac{x}{h}$.

Итак, $\Delta A_1B_1C_1 \propto \Delta ABC$, $h = \frac{x}{h}$,

Следовательно, $\frac{S(x)}{S} = \left(\frac{x}{h}\right)^2$, или $S(x) = \frac{S}{h^2} x^2$.

Применим теперь основную формулу для вычисления объемов тел при $a = 0$, $b = h$, получаем

$$V = \int_0^h S(x)dx = \int_0^h \frac{S}{h^2} x^2 dx = \frac{S}{h^2} \int_0^h x^2 dx = \frac{S}{h^2} \frac{x^3}{3}\Bigg|_0^h = \frac{1}{3} S \cdot h.$$

2. Докажем теперь теорему для произвольной пирамиды с высотой $h$ и площадью основания $S$ (рис. 2). Такую пирамиду можно разбить на треугольные пирамиды с общей высотой $h$. Выразим объем каждой треугольной пирамиды по доказанной нами формуле и сложим эти объемы. Вынося за скобки общий мно-

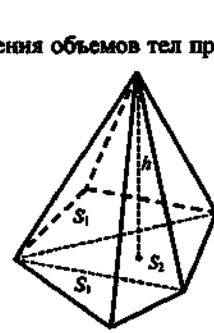


*Рис. 2*

житель $\frac{1}{3}h$, получим в скобках сумму площадей оснований треугольных пирамид, т.е. площадь $S$ основания исходной пирамиды. Таким образом, объем исходной пирамиды равен $\frac{1}{3}Sh$. Теорема доказана.

**II. Решение задач (по готовым чертежам)**

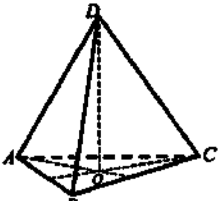



*Рис. 3*

*Дано*: $ABCD$ – правильная пирамида. $AB = 3$; $AD = 2\sqrt{3}$ (рис. 3).

*Найти*: а) $S_{осн.}$; б) $AO$; в) $DO$; г) $V$.

*Решение*:

а) $S_{осн.} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ (используем формулу для вычисления площади правильного треугольника).

$S_{осн.} = \frac{9\sqrt{3}}{4}$.

б) $AO = R = \frac{2}{3}h = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ (формула радиуса описанной окружности через сторону правильного треугольника). $AO = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$.

в) $DO = H = \sqrt{AD^2 - AO^2}$ (по теореме Пифагора).

$$DO = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 - \left(\frac{3\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \sqrt{12 - \frac{9}{3}} = \sqrt{9} = 3.$$

г) $V = \frac{1}{3}S_{осн.} \cdot H^3 = \frac{1}{3} \cdot \frac{9\sqrt{3}}{4} \cdot 3 = \frac{9\sqrt{3}}{4}$;

(*Ответ*: а) $\frac{9\sqrt{3}}{4}$, б) $\sqrt{3}$, в) 3, г) $\frac{9\sqrt{3}}{4}$.)

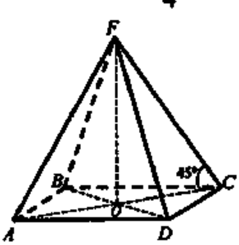



*Рис. 4*

2. *Дано*: $ABCDF$ – правильная пирамида. $\angle FCO = 45°$; $FO = 2$ (рис. 4).

*Найти*: а) $S_{осн.}$; б) $V$.

*Решение*:

1) Рассмотрим $\Delta FOC$: $\angle O = 90°$, $\angle C = 45°$, значит, $\angle F = 45°$. Следовательно, $\Delta FOC$ – равнобедренный, $OC = FO = 2$.
2) $AC = 2OC = 4$. $d = AC = AD\sqrt{2}$ (по свойству диагонали квадрата, $d^2 = 2a^2$). Тогда

$$AD = \frac{AC}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}.$$

3) $ABCD$ – квадрат (пирамида правильная). $S_{осн.} = AD^2 = (2\sqrt{2})^2 = 8$.

4) $V = \frac{1}{3}S_{осн.} \cdot h$. $V = \frac{1}{3} \cdot 8 \cdot 2 = \frac{16}{3} = 5\frac{1}{3}$.

(*Ответ*: а) 8; б) $5\frac{1}{3}$.)

3. *Дано*: $ABCDEKF$ – правильная пирамида. $FO \perp (ABC)$, $FM \perp AK$, $FO = 4$, $FM = 5$ (рис. 5).

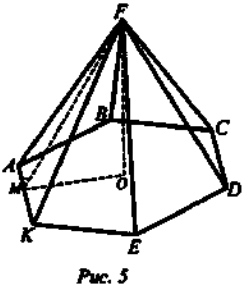


*Рис. 5*

*Найти*: а) $S_{осн.}$, б) V.

*Решение*:

1) Рассмотрим $\Delta FOM$: $\angle O = 90°$ (так как $FO \perp (ABC)$, значит, $FO \perp OM$) $FO = 4$, $FM = 5$. $OM = \sqrt{MF^2 - FO^2}$ (по теореме Пифагора), $OM = \sqrt{25-16} = \sqrt{9} = 3$. $OM = r$ ($r$ – радиус окружности, вписанной в правильный шестиугольник). $AK = 2r \cdot \operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = 2 \cdot 3\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$.

2) $S_{осн.} = 6S_{\Delta AOK}$, $S_{AOK} = \frac{1}{2}AK \cdot OM = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot 3 = 3\sqrt{3}$. $S_{осн.} = 6 \cdot 3\sqrt{3} = 18\sqrt{3}$.

3) $V = \frac{1}{3}S_{осн.} \cdot H$; $V = \frac{1}{3} \cdot 18\sqrt{3} \cdot 4 = 24\sqrt{3}$.

(*Ответ*: а) $18\sqrt{3}$, б) $24\sqrt{3}$.)

4. *Дано*: $A_1A_2A_3A_4$ – ромб, $SA_1A_2A_3A_4$ – пирамида, $A_1A_4 = a$, $\angle SBO = \beta$, $OB \perp A_3A_4$, $\angle A_2A_1O = \alpha$ (рис. 6).

*Рис. 6*

*Найти*: V – ?

*Решение*:

1) Рассмотрим $\Delta OA_3A_4 : OA_3 = a\cos\alpha$, $\Delta OA_3B : OB = a\cos\alpha\sin\alpha = \frac{1}{2}a\sin 2\alpha$.

2) $\Delta SOB$: $SO = \frac{1}{2}a\sin 2\alpha\operatorname{tg}\beta$.

3) $S_{осн.} = 4S_{\Delta A_3OH_4} = 4 \cdot \frac{1}{2}a \cdot OB = 2a \cdot \frac{1}{2}a\sin 2\alpha = a^2\sin 2d$

4) $V_{пир.} = \frac{1}{3}S_{осн.} \cdot SO$, $V_{пир.} = \frac{1}{3} \cdot a^2\sin 2\alpha \cdot \frac{1}{2}a\sin 2\alpha\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{6}a^3\sin^2 2\alpha\operatorname{tg}\beta$

(*Ответ*: $\frac{1}{6}a^3\sin^2 2\alpha\operatorname{tg}\beta$.)

**Домашнее задание**

Вывести формулу для вычисления объема усеченной пирамиды;

П. 69, в 4,5 стр. 161. № 684 *а*), 686 *а*), 687.

## Урок 42. Объем пирамиды

*Цели урока:*

– сформировать навык нахождения объема пирамиды, у которой вершина проецируется в центр вписанной или описанной около основания окружности.

### Ход урока

**I. Проверка вывода формулы для вычисления объема усеченной пирамиды (ученик у доски)**

Ответ ученика:

Объем усеченной пирамиды рассматриваем как разность объемов полной пирамиды и той, что отсечена от нее плоскостью, параллельной основанию (рис. 1).

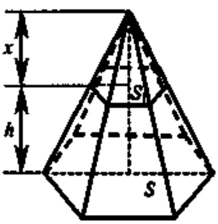



*Рис. 1*

Поэтому,

$$V_{\text{ус.пир.}}=\frac{1}{3}S(h+x)-\frac{1}{3}S_1x=\frac{1}{3}Sh+\frac{1}{3}(S-S_1)x \quad (1)$$

Из равенства $\frac{S}{S_1}=\frac{(h+x)^2}{x^2}$. Находим: $x=\frac{h\sqrt{S_1}}{\sqrt{S}-\sqrt{S_1}}$. Подставляем это выражение для $x$ в формулу (1),

$$V_{\text{ус.пир.}}=\frac{1}{3}Sh+\frac{1}{3}(S-S_1)\frac{h\sqrt{S_1}}{\sqrt{S}-\sqrt{S_1}}=\frac{1}{3}Sh+\frac{1}{3}(\sqrt{S}+\sqrt{S_1})h\sqrt{S_1}=$$

$$=\frac{1}{3}Sh+\frac{1}{3}S_1h+\frac{1}{3}h\sqrt{SS_1}=\frac{1}{3}h(S+S_1+\sqrt{S_1S}).$$

**II. Устная работа в форме теста, с проверкой у доски.**

1. В наклонной призме боковое ребро равно 7 см, перпендикулярное сечение – прямоугольный треугольник с катетами: 4 см и 3 см. найдите объем призмы.

   а) 10 см$^3$, б) 42 см$^3$, в) 60 см$^3$, г) 30 см$^3$.

2. В правильной шестиугольной пирамиде сторона ее основания 2 см, объем пирамиды 6 см$^3$. Чему равна высота?

   а) $\sqrt{3}$ см, б) 3 см, в) $\frac{1}{3}$ см.

3. Объем пирамиды равен 56 см$^3$, площадь основания 14 см$^2$. Чему равна высота?
   а) 14 см, б) 12 см, в) 16 см.
4. В правильной треугольной пирамиде высота равна 5 см, стороны основания 3 см. Чему равен объем пирамиды?
   а) $\frac{15\sqrt{3}}{4}$ см$^3$, б) $\frac{25\sqrt{3}}{2}$ см$^3$, в) $\frac{75\sqrt{3}}{4}$ см$^3$.
5. В правильной четырехугольной пирамиде высота равна 9 см. Сторона основания 4 см. найдите объем пирамиды.
   а) 50 см$^3$, б) 48 см$^3$, в) 16 см$^3$.
6. Объем правильной четырехугольной пирамиды равен 27 см$^3$, высота 9 см. найти сторону основания.
   а) 12 см, б) 9 см, в) 3 см.
7. Объем усеченной пирамиды равен 210 см$^3$, площадь нижнего основания 36 см$^2$, верхнего 9 см$^2$. Найдите высоту пирамиды.
   а) 1 см, б) 15 см, в) 10 см.
8. Равновеликие призма и правильная четырехугольная пирамида имеют равные высоты.

Чему равна сторона основания пирамиды, если площадь основания призмы равна $S$?

а) $\frac{1}{3}S$, б) $3S$, в) $\sqrt{3S}$.

Таблица ответов.

| Задача | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Ответ | б | а | б | а | б | в | в | в |

**III. Решение задач**

Рассмотрим базовые задачи (повторение).

*Задача № 1.*

Если боковые ребра пирамиды равны (или составляют равные углы с плоскостью основания), то вершина пирамиды проецируется в центр окружности, описанной около основания (рис. 2).

*Доказательство*:

1) $\Delta MAO = \Delta MBO = \Delta MCO = \ldots$ (равны по катету и гипотенузе или по катету и острому углу).
2) Тогда $OA = OB = OC = \ldots$, т.е. точка $O$ – центр окружности, описанной около основания.

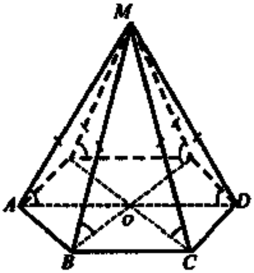



*Рис. 2*

***Задача № 2.***

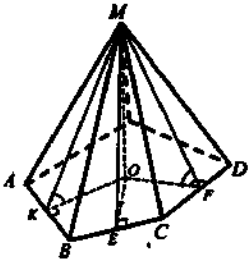



*Рис. 3*

Если двугранные углы при основании пирамиды равны (или равны высоты боковых граней, проведенные из вершины пирамиды), то вершина пирамиды проецируется в центр окружности, вписанной в основание пирамиды (рис. 3).

*Доказательство*:

1) $\Delta MKO = \Delta MEO = \Delta MFO = \ldots$ (по катету и острому углу).
2) $OK = OE = OF = \ldots$, т.е. точка $O$ – центр окружности, вписанной в основание пирамиды.

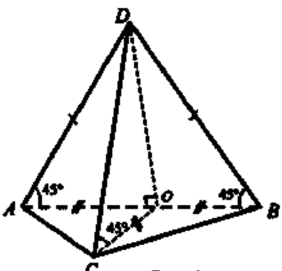



*Рис. 4*

***Решаем задачи по готовым чертежам:***

1. *Дано*: $ABCD$ – пирамида. $\Delta ABC$ – прямоугольный, $\angle C = 90°$, $AC = 6$, $BC = 8$. Каждое боковое ребро составляет с плоскостью основания угол 45° (рис. 4).

*Найти*: $V_{пир.}$ – ?

*Решение*:

1) Так как $\alpha = 45°$, то вершина пирамиды проецируется в центр окружности, описанной около основания. $\Delta ABC$ – прямоугольный, значит, точка $O$ – середина гипотенузы, $AO = OC = OB$.
2) $\Delta ABC$, $\angle C = 90°$, тогда по теореме Пифагора: $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2}$ $AB = 10$, $AO = 5$.
3) $\Delta AOD$: $\angle O = 90°$, $\angle D = \angle A = 45°$, $DO = OA = 5$.
4) $S_{осн.} = \dfrac{1}{2} AC \cdot BC$, $S_{осн.} = \dfrac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24$.
5) $V_{пир.} = \dfrac{1}{3} S_{осн.} \cdot H$, $V_{пир.} = \dfrac{1}{3} 24 \cdot 5 = 40$, так как $H = DO$.

(*Ответ*: 40.)

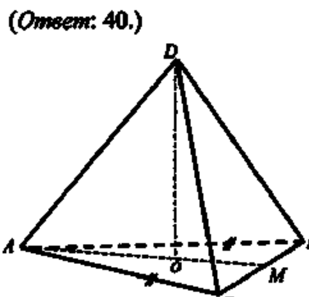



*Рис. 5*

2. *Дано*: $ABCD$ – пирамида. $\Delta ABC$ – равнобедренный. $AB = AC = 10$, $BC = 12$. $AD = BD = CD = 15$ (рис. 5).

*Найти*: $V$ – ?

*Решение*:

1) Так как $AD = BD = CD = 15$, то вершина пирамиды проецируется в центр окружности, описанной около основания, значит, $R = AO$.

2) $S_\Delta = \frac{abc}{4R}$; $R = \frac{abc}{4S}$. $S_\Delta = \sqrt{p(p-a)(p-в)(p-c)}$, $p = \frac{a+b+c}{2}$, тогда $S_\Delta = 48$. $R = \frac{10^2 \cdot 12}{4 \cdot 48} = \frac{25}{4}$;

3) $\Delta ACD : OD = \sqrt{15^2 - (\frac{25}{4})^2} = \frac{5}{4}\sqrt{119}$.

4) $V = \frac{1}{3}S_{осн.} \cdot H$, $V = \frac{1}{3}48 \cdot \frac{5}{4}\sqrt{119} = 20\sqrt{119}$.

(*Ответ*: $20\sqrt{119}$.)

Решение задач из учебника: № 695 (а, б).

***Задача № 695 а).*** *Дано*: $S_{ABC}$ – пирамида, $\angle CAB = 90°$, $BC = C$, $\angle ABC = \varphi$, $\angle SCO = Q$ (рис. 6).

*Найти*: $V_{пир.}$ – ?

*Решение*:

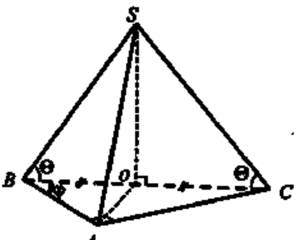


*Рис. 6*

1) $V_{пир.} = \frac{1}{3}S_{осн.} \cdot \text{H}$,

2) $S_{осн.} = \frac{1}{2}AB \cdot AC$. Рассмотрим $\Delta ABC$: $\angle A = 90°$, $BC = C$, $\angle CBA = \varphi$. $AB = C \cdot \cos\varphi$, $AC = C \cdot \sin\varphi$. Тогда $S_{осн.} = \frac{1}{2}C^2\cos\varphi\sin\varphi = \frac{1}{4}C^2\sin 2\varphi$.

3) Так как точка $O$ – центр окружности, описанной около основания, и $OB = OC = OA$, то $SA = SB = SC$.

4) $OC = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}C$; Значит, $SO = \frac{1}{2}\text{ctg}Q$;

5) $V_{пир.} = \frac{1}{3}S_{осн.} \cdot SO$; $V_{пир.} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}C^2\sin 2\varphi \cdot \frac{1}{2}C \cdot \text{tg}Q = \frac{1}{24}C^3\sin^2\varphi\text{tg}Q$.

(*Ответ*: $\frac{1}{24}C^3\sin 2\varphi\text{tg}Q$.)

***Задача 695 б).*** *Дано*: $ABCD$ – пирамида. $\Delta ABC$ – равнобедренный. $AB = AC = 10$; $BC = 12$. $\angle DMO = 45°$ (рис. 7).

*Найти*: $V_{пир.}$ = ?

*Решение*:

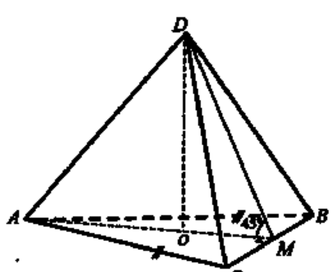


*Рис. 7*

1) $OM = r$, $S_\Delta = pr$, где $p = \frac{a+b+c}{2}$;

точка $O$ – центр вписанной в основание окружности.

2) $S_\Delta = 48$ (смотри предыдущую задачу, формула Герона). $r = \dfrac{S}{P}$;

$$r = \frac{48}{16} = 3;$$

3) $\Delta DOM$: $OD = OM = 3$, т.к. $\angle ODM = 45°$.

4) $V = \dfrac{1}{3}S_{\text{осн.}} \cdot H$, $V = \dfrac{1}{3} \cdot 48 \cdot 3 = 48$.

(*Ответ*: 48.)

**IV. Подведение итогов**

– Что необходимо знать, чтобы определить объем пирамиды?

---

**Домашнее задание**

П. 69, № 695 *в*), 697, 690.

## Урок 43. Объем пирамиды

*Цель урока:*

– выработать навыки решения типовых задач на применение формул объемов пирамиды и усеченной пирамиды.

## Ход урока

**I. Проверка домашнего задания**

(на доске № 697)

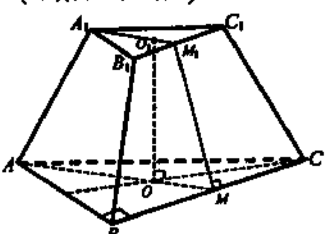



*Рис. 1*

***Задача № 697.*** *Дано*: $ABCA_1B_1C_1$ – правильная усеченная пирамида. $AB = a$, $A_1B_1 = 0{,}5a$. $MM_1 \perp BC$, $MM_1 = a$ (рис. 1).

*Найти*: $V_{\text{ус.пир.}}$ – ?

*Решение*:

1) Рассмотрим $\Delta ABC$, найдем $AM$ ($AM \perp BC$). $AM = h = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$;

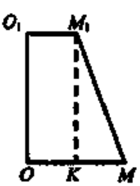



*Рис. 1 а)*

2) $\Delta A_1B_1C_1$, найдем $A_1M_1$ ($A_1M_1 \perp B_1C_1$).

$$A_1M_1 = h_1 = \frac{A_1B_1\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{4};$$

3) $S_{\Delta ABC} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$. $S_{\Delta A_1B_1C_1} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{16}$;

4) Рассмотрим прямоугольную трапецию $OO_1M_1M$ (рис 1 *а*)): $OM = \dfrac{1}{3}AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$. $O_1M_1 = \dfrac{1}{3}A_1M_1 = \dfrac{a\sqrt{3}}{12}$;

$M_1K \perp OM$; $O_1M_1 = OK$. $KM = OM - O_1M_1$. $KM = \frac{a\sqrt{3}}{6} - \frac{a\sqrt{3}}{12} = \frac{a\sqrt{3}}{12}$;

Из $\Delta KM_1M$: $\angle K = 90°$, по теореме Пифагора. $M_1K = \sqrt{MM_1^2 - KM^2}$

$= \sqrt{a^2 - \frac{a^2 \cdot 3}{144}} = \frac{a}{12}\sqrt{141}$.

5) $V_{\text{ус.пир}} = \frac{1}{3}h(S_1 + S_1 + \sqrt{SS_1})$.

$V_{\text{ус.пир}} = \frac{1}{3}\frac{a}{12}\sqrt{141}\left(\frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{a^2\sqrt{3}}{16} + \frac{a^2\sqrt{3}}{8}\right) = \frac{7\sqrt{47}a^3}{192}$;

(*Ответ*: $\frac{7\sqrt{47}a^3}{192}$.)

**II. Решение задач**

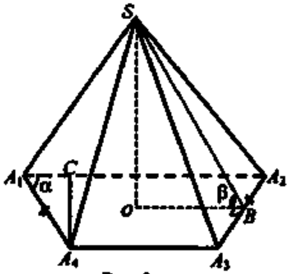


Рис. 2

1. *Дано*: $A_1A_2A_3A_4$ – трапеция, $A_1A_4 = A_3A_2$; $O$ – центр окружности, вписанной в трапецию $SO \perp (A_1A_2A_3)$, $A_1A_4 = a_1$ (рис. 2).

*Найти*: $V_{\text{пир}}$ – ?

*Решение*:

1) Проведем $A_4C \perp A_1A_2$. Рассмотрим $\Delta A_1CA_4$: $\angle C = 90°$, $A_1A_4 = a$, тогда $A_1C = h = a\sin\alpha$,

$OB = r = \frac{1}{2}A_4C = 0{,}5a\sin\alpha$.

2) $H = SO = OB\text{tg}\beta = 0{,}5a\ \sin\alpha\text{tg}\beta$.

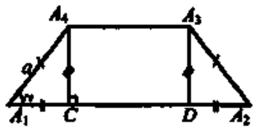


Рис. 3

3) Рассмотрим равнобедренную трапецию $A_1A_2A_3A_4$, найдем ее площадь. $H = A_4C = a\sin\alpha$. Пусть $CD = x$, тогда (рис. 3) $S_{\text{тр.}} = \frac{A_1A_2 + A_3A_4}{2} \cdot A_4C$,

$A_1C = a\cos\alpha$, подставим в формулу, $S_{\text{тр.}} = \frac{(2a\cos\alpha + 2x) \cdot a\sin\alpha}{2}$. С одной стороны, площадь многоугольника можно найти через периметр и радиус вписанной окружности. $S_{\text{тр.}} = \frac{1}{2}Pr$, тогда

$S_{\text{тр.}} = \frac{2a + 2x + 2a\cos\alpha}{2} \cdot 0{,}5a\sin\alpha$. Уравняем правые части,

$\frac{(2a\cos\alpha + 2x)a\sin\alpha}{2} = \frac{2(a + x + \cos\alpha) \cdot 0{,}5a\sin\alpha}{2}$. После упрощения получим $x = a - a\cos\alpha$. Итак, площадь основания равна

$$S_{тр.} = \frac{2a\cos\alpha + 2(a - a\cos\alpha)}{2} \cdot a\sin\alpha = a2\sin\alpha.$$

4) $V_{пир.} = \frac{1}{3} S_{осн.} \cdot SO$, $V_{пир} = \frac{1}{3} a2\sin\alpha \cdot 0{,}5a\sin\alpha\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{6} a3\sin2\alpha\operatorname{tg}\beta$. (*Ответ*: $\frac{1}{6} a3\sin2\alpha\operatorname{tg}\beta$.)

**III. Проверочная самостоятельная работа (разноуровневая)**
(см. приложение)

***Ответы:***

*Вариант $А_1$* 192 см³. *Вариант $Б_1$* 343 см³. *Вариант $В_1$* $\frac{1}{3}R^3\frac{\sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha/2}{\operatorname{tg}\beta}$

*Вариант $А_2$* 360 см³. *Вариант $Б_2$* 320 см³. *Вариант $В_2$* $\frac{2}{3}l^3\frac{\sin\alpha\sin\beta\sin(\alpha+\beta)}{\sin j \cdot \cos^2 j}$

***Решение проверочной самостоятельной работы***

***Вариант $А_1$***

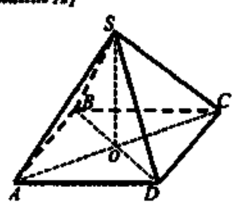


*Рис. 4*

*Решение:*

1) $AS = BS = CS = DS$, значит, $AO = BO = CO = DO$.
2) $AO = \frac{1}{2}AC$, $AC = \sqrt{AD^2 + DC^2} = 10$, $AO = 5$.
3) $\Delta ASO$: $SO = \sqrt{AS^2 - AO^2} = \sqrt{144} = 12$.
4) $S_{осн.} = 6 \cdot 8 = 48$ (см2)
5) $V_{пир.} = \frac{1}{3} S_{осн.} \cdot SO$. $V_{пир.} = \frac{1}{3} 48 \cdot 12 = 192$ (см3). (*Ответ*: 192 см³.)

***Вариант $А_2$***

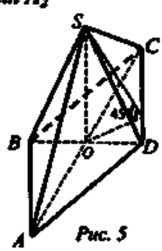


*Рис. 5*

*Решение:*

1) $\angle SMO = 45°$.
$\Delta SMO$: $SO = OM = 6$ см. $OM \perp CD$.
2) $S_{ABCD} = 6 \cdot \frac{1}{2} CD \cdot OM$
$S_{ABCD} = 3 \cdot 10 \cdot 6 = 180$ (см³)
3) $V_{пир} = \frac{1}{3} S_{осн.} \cdot SO$, $V_{пир.} = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot 180 = 360$ (см₃). (*Ответ*: 360 см³.)

***Вариант $Б_1$***

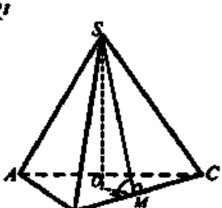


*Рис. 6*

***Вариант $Б_2$***

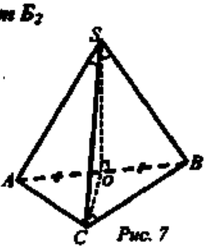


*Рис. 7*

*Решение*:

1) $\angle SMO = 45°$, точка $O$ – центр вписанной в основание окружности, $OM = r$, $OM \perp BC$.
2) $S_{осн.} = \sqrt{p(p-a)(p-в)(p-c)}$ формула Герона. $S_{осн.} = \sqrt{21\cdot8\cdot7\cdot6} = 3\cdot4\cdot7 = 147$ (см$^2$) с др. стороны $S_{осн.} = \frac{1}{2}P\cdot r$, $P = 42$ см. $r = \frac{2S}{P}$;

$r = \frac{2\cdot147}{42} = 7$ (см).

3) $\Delta SOM$ – равнобедренный, $SO = OM = 7$ см.
4) $V_{пир.} = \frac{1}{3}S_{осн.}\cdot SO$. $V_{пир.} = \frac{1}{3}\cdot147\cdot7 = 343$ (см$^3$). (*Ответ*: 343 см$^3$.)

***Вариант В₁***

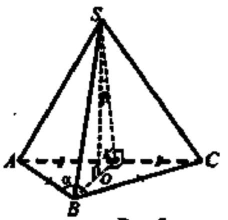



*Рис. 8*

*Решение*:

1) Пусть $BC = a$, $AC = 2KC = 2a\sin\frac{\alpha}{2}$.
2) $S_\Delta = \frac{abc}{4R}$, тогда $S_\Delta = \frac{a\cdot a\cdot2a\sin\alpha/2}{4R}$, с другой стороны $S_\Delta = \frac{1}{2}a2\sin\alpha$. Приравниваем, $\frac{a^3\sin\alpha/2}{2R} = \frac{a^2\sin\alpha}{R}$,

$a = \frac{R2\sin\alpha/2\cos\alpha/2}{\sin\alpha/2} = 2R\cos\alpha/2$;

3) $S_\Delta = \frac{1}{2}4R2\cos2\frac{\alpha}{2}\sin\alpha = 2R2\cos2\cdot\frac{\alpha}{2}\sin\alpha$,
4) $BK = a\cdot\cos\frac{\alpha}{2} = 2R\cos2\frac{\alpha}{2}$, $BK = R + r$,

$r = BK - R = 2R\cos2\frac{\alpha}{2} - R$.

*Решение*:

1) Так как $\angle ASO = \angle BSO = \angle CSO = 45°$, то $\angle SAO = \angle SBO = \angle SCO$; тогда $AO = OB = OC = R$.
2) $OA = OB$, точка $O$ – центр окружности, описанной около основания.
3) $AB = \sqrt{12^2+16^2} = \sqrt{400} = 20$. $R = 10$, $S_{осн.} = \frac{1}{2}AC\cdot BC = \frac{1}{2}\cdot12\cdot16 = 96$ (см$^2$).
4) $\Delta ASO$: $SO = OB = 10$ см.
5) $V_{пир.} = \frac{1}{3}S_{осн.}\cdot SO$. $V_{пир.} = \frac{1}{3}\cdot96\cdot10 = 320$ (см$^3$)

(*Ответ*: 320 см$^3$.)

***Вариант В₂***

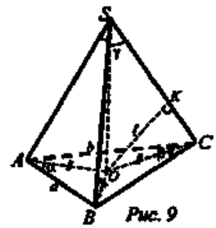



*Рис. 9*

*Решение*:

1) $OK \perp SC$, $\Delta SOK$: $SO = H = \frac{l}{\sin j}$

$\Delta SOC$: $R = OC = SO\cdot \mathrm{tg} j = \frac{l}{\sin j}\cdot\mathrm{tg} j = \frac{l}{\cos j}$.

2) Составим равенство из формул для вычисления площадей треугольника.

$\frac{abc}{4R} = \frac{1}{2}ab\sin\alpha$; $C = 2R\cdot\sin\alpha$.

$\frac{abc}{4R} = \frac{1}{2}bc\sin\beta$; $a = 2R\sin\beta$. $\frac{abc}{4R} = \frac{1}{2}ac\sin(180° - (\alpha+\beta))$;

$b = 2R\sin(\alpha+\beta)$.

3) $S_{ABC} = \frac{1}{2}ab\sin\alpha$. $S_{ABC} = \frac{1}{2}\cdot2R\sin\beta\cdot$

5) $SO = H = \frac{OK}{tg\beta} = \frac{R2(\cos\alpha/2-1)}{tg\beta} = \frac{R\cos\alpha}{tg\beta}$.

5) $V_{пир.} = \frac{1}{3} S_{осн.} \cdot SO$.

$V_{пир.} = \frac{1}{3} 2R2\cos2\frac{\alpha}{2}\sin\alpha \cdot \frac{R\cos\alpha}{tg\beta} =$

$= \frac{1}{3} R^3 \frac{\sin2\alpha\cos^2\alpha/2}{tg\beta}$.

(*Ответ*: $\frac{1}{3} R^3 \frac{\sin2\alpha\cos^2\alpha/2}{tg\beta}$.)

$\cdot 2R\sin(\alpha+\beta) \cdot \sin\alpha$.

$S_{ABC} = 2R2\sin\alpha\sin\beta\sin(\alpha+\beta)$.

$S_{ABC} = 2\frac{l^2}{\cos^2} \cdot \sin\alpha\sin\beta\sin(\alpha+\beta)$.

4) $V = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot SO$,

$V = \frac{2}{3} l^3 \frac{\sin\alpha\sin\beta\sin(\alpha+\beta)}{\sin j \cdot \cos^2 j}$,

(*Ответ*: $\frac{2}{3} l^3 \frac{\sin\alpha\sin\beta\sin(\alpha+\beta)}{\sin j \cdot \cos^2 j}$).

---

**Домашнее задание**

**Обменяться вариантами самостоятельной работы.**

## Урок 44. Объем конуса

*Цели урока:*

- **вывести формулу объема конуса с помощью определенного интеграла;**
- **рассмотреть следствие из теоремы, в котором выводится формула объема усеченного конуса.**
- **показать применение полученных формул при решении типовых задач.**

## Ход урока

### I. Организационный момент

**Сообщить тему урока, сформулировать цели урока.**

### II. Актуализация знаний учащихся

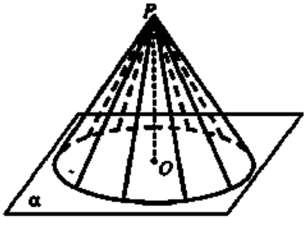


*Рис. 1*

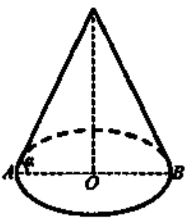


*Рис. 2*

**Теоретический опрос.**

**Повторить понятия конуса п усеченного конуса.**

1. **Рассмотрим окружность $L$ с центром в точке $O$ и прямую $OP$, перпендикулярную плоскость $\alpha$. Каждую точку окружности соединим отрезком с точкой $P$. Поверхность, образованная этими отрезками, называется... (рис. 1).**
2. **Тело, ограниченное конической поверхностью и кругом, называется:**
   **а) Цилиндром.**
   **б) Конусом.**
   **в) Пирамидой.**
3. **Установите соответствие между элементами конуса (рис. 2).**

а) $SO$ –

б) $SA$, $SB$ –

в) $S$ –

г) $OA$ –

д) $\angle\alpha$

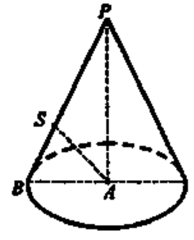


Рис. 3

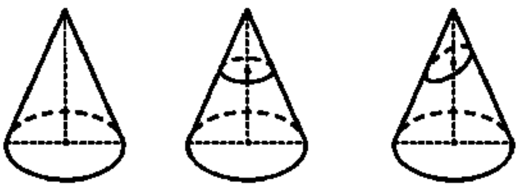
4. Конус может быть получен вращением прямоугольного треугольника вокруг (рис. 3):

   а) гипотенузы $PB$;

   б) катета $PA$;

   в) отрезка $AS$.

5. Выберите чертеж с сечением, перпендикулярным оси конуса (рис. 3 *а), б), в)*).



*а)* *б)* *в)*

Рис. 3

6. Возьмем произвольный конус и проведем секущую плоскость, перпендикулярную к его оси. Эта плоскость пересекается с конусом по кругу и разбивает конус на две части. Одна из частей представляет собой конус, а другая называется усеченным конусом.

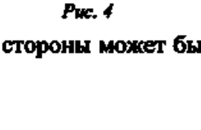


Рис. 4

7. Установите соответствие (рис. 4):

   а) $OK$ –

   б) $O_1K_1$ –

   в) $AP$ –

   г) $O_1O$ –

8. Вращением какой трапеции вокруг ее боковой стороны может быть получен усеченный конус?

   а) любой;

   б) прямоугольной;

   в) равнобедренной.

Повторить вопросы планиметрии.

1) Записать формулу для вычисления площади круга ($S = \pi R^2$).

2) Дать определение подобия фигур.

3) Сформулировать признаки подобия треугольников.

Повторить конспект урока № 39.

В прямоугольной системе координат на плоскости рассмотрим криволинейную трапецию, ограниченную графиком непрерывной неотрицательной

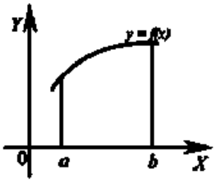


Рис. 5

функции $f(x)$, осью абсцисс и прямыми $x = a$ и $x = b$ $(a < b)$. Рассмотрим тело, полученное вращением вокруг оси абсцисс криволинейной трапецией (рис. 5).

Очевидно, что сечение этого тела плоскостью, проходящей через точку с абсциссой $x \in [a; b]$ и перпендикулярной оси $Ox$, есть круг (или точка) радиуса $f(x)$. Следовательно, площадь $S(x)$ этого сечения равна $S(x) = \pi f^2(x)$, а объем рассматриваемого тела вращения вычисляется по формуле $V = \pi\int\limits_a^b f^2(x)dx$ (1) (рис. 6).

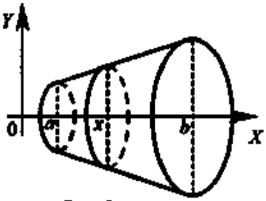


Рис. 6

## III. Изучение нового материала

***Теорема.* Объем конуса равен одной трети произведения площади основания на высоту (рис. 7).**

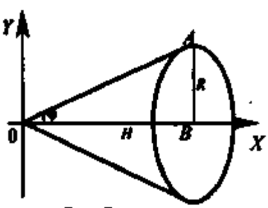


Рис. 7

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H.$$

*Доказательство*: Данный конус можно рассматривать как тело, полученное вращением прямоугольного треугольника с вершиной в точках $O(0; 0)$, $B(H; 0)$, $A(H; R)$ вокруг оси $Ox$. Уравнение прямой $OA$ имеет вид: $y = kx$, где $k = \operatorname{tg}\varphi = \frac{|AB|}{|OA|} = \frac{R}{H}$. Треугольник $OAB$ является частным видом криволинейной трапеции, которая ограничена осью абсцисс, графиком функции $y = \frac{R}{H}x$ и прямой $x = H$.

Поэтому объем конуса можно найти с помощью формулы (1), то есть $V = \pi\int\limits_O^H\left(\frac{R}{H}x\right)^2 dx = \frac{\pi R^2}{H^2}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_O^H = \frac{\pi R^2}{H^2}\cdot\frac{H^3}{3} - \frac{\pi R^2}{H^2}\cdot\frac{O^3}{3} = \frac{\pi R^2 H}{3} = \frac{1}{3}\pi R^2 H$. Площадь основания конуса равна $S = \pi R^2$, поэтому $V = \frac{1}{3}SH$. Теорема доказана.

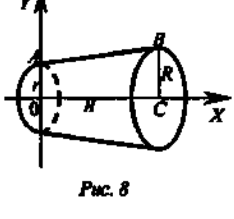


Рис. 8

***Следствие.* Объем усеченного конуса с радиусами оснований $r$ и $R$ и высотой $H$ вычисляется по формуле $V = \frac{1}{3}\pi H(r^2 + R^2 + rR)$.**

*Доказательство* (рис. 8): Усеченный конус можно получить вращением вокруг оси $Ox$ трапеции $OABC$. Прямая $AB$ проходит через точки $(0; r)$ и

$(H;\ R)$, поэтому она имеет уравнение $y=\frac{R-r}{H}x+r$ (уравнение прямой вывести самостоятельно). Используя формулу (1), получим $V=\pi\int\limits_0^H\left(\frac{R-r}{H}x+r\right)^2dx$.

Для вычисления интеграла сделаем замену $u=\frac{R-r}{H}x+r$, $d_u=\frac{R-r}{H}dx$. Очевидно, когда $x$ изменяется в пределах от 0 до $H$, перемещаясь, изменяется от $r$ до $R$, и поэтому

$$V=\pi\int\limits_r^R u^2\frac{H}{R-r}du=\frac{\pi H}{R-r}\cdot\frac{u^3}{3}\bigg|_r^R=\frac{\pi H}{3(R-r)}(R^3-r^3)=\frac{1}{3}\pi H(R^2+r^2+Rr).$$

Следствие доказано.

Формулу $V=\frac{1}{3}h\left(S+S_1+\sqrt{S\cdot S_1}\right)$ доказать самостоятельно.

## IV. Закрепление изученного

1. Решить (устно) задачи с целью закрепления формул для вычисления объемов конуса и усеченного конуса.

   № 1. *Вычислите* объем конуса, если его высота 6 см, а площадь основания 42 см$^2$. (*Ответ:* 84 см$^3$.)

   № 2. Объем конуса с радиусом основания 4 м и высотой 6 м равен: (*Ответ:* $32\pi$ м$^3$.)

   № 3. *Найдите* площадь основания конуса, если его объем равен 256 см$^3$, а высота 4 м. (*Ответ:* 252 см$^2$.)

   № 4. *Вычислите* объем усеченного конуса, высота которого 3 см, а площадь оснований 16 см$^2$ и 4 см$^2$. (*Ответ:* 32 см$^3$.)

   № 5. *Вычислите* объем усеченного конуса, если радиусы его оснований равны 3 см и 9 см, а высота 6 см. (*Ответ:* $234\pi$ см$^3$.)

2. Решить в рабочих тетрадях и на доске задачи:

   № 1. Образующая конус $l$ составляет с плоскостью основания угол $\alpha$. *Найдите* объем конуса.

   № 2. Радиусы оснований усеченного конуса $R$ и $r$; образующая наклонена к плоскости основания под углом 45°. *Найдите* объем конуса.

   № 3. Длина образующей конуса равна $l$, а длина окружности основания $C$. *Найдите* объем конуса.

***Решение задач.***

***№ 1.*** (рис. 9).

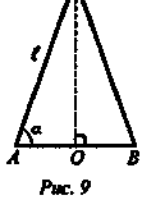


*Рис. 9*

$\Delta PAB$ – осевое сечение конуса, $PA=PB=l$, $PO$ – высота, $V=\frac{1}{3}\pi AO^2\cdot PO$. Из $\Delta APO\ (\angle O=90°)$: $\frac{PO}{l}=\sin\alpha$,

$PO = l\sin\alpha$, $\dfrac{AO}{l} = \cos\alpha$, $OA = l\cos\alpha$, $V = \dfrac{1}{3}\pi l^2\cos^2\alpha \cdot l\sin\alpha = \dfrac{1}{3}\pi l^3 \cdot 2\sin\alpha\cos\alpha \cdot$

$\cdot \dfrac{1}{2}\cos\alpha = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}\pi l^3\sin^2\alpha\cos\alpha = \dfrac{1}{6}\pi l^3\sin^2\alpha\cos\alpha$. (*Ответ*: $V = \dfrac{1}{6}\pi l^3\sin^2\alpha\cos\alpha$.)

**№ 2.** (рис. 10).

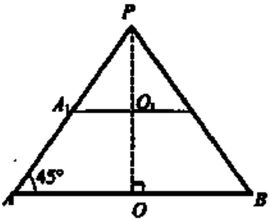



*Рис. 10*

$(R > r)$

*I способ*:

Дополнить усеченный конус до полного и тогда $V_{ус.} = V_н - V_1$, где $V_н = \dfrac{1}{3}\pi AO^2 \cdot PO$, $V_1 = \dfrac{1}{3}\pi A_1O\,O_1^2 \cdot PO_1$. Из $\Delta APO$ ($\angle O = 90°$): $\angle APO = 45°$, значит, $PO = AO = R$. Из $\Delta A_1PO_1$ ($\angle O = 90°$): $\angle A_1 = 45°$, значит, $PO_1 = A_1O_1 = r$ $V_н = \dfrac{1}{3}\pi R^2 \cdot R =$

$= \dfrac{1}{3}\pi R^3$, $V_1 = \dfrac{1}{3}\pi r^2 \cdot r = \dfrac{1}{3}\pi r^3$, $V_{ус.} = \dfrac{1}{3}\pi R^3 - \dfrac{1}{3}\pi r^3 = \dfrac{1}{3}\pi(R^3 - r^3)$.

*II способ*:

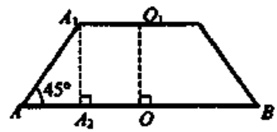



*Рис. 11*

Рассмотреть трапецию $AA_1O_1O$ (рис. 11).

Д.П.: $A_1A_2 \perp AO$. $A_2O = A_1O_1 = r$, $AA_2 = R - r$. Из $\Delta AA_1A_2$ ($\angle A_2 = 90°$): $\angle AA_1A_2 = 45°$, значит, $A_1A_2 = R - r$. $V = \dfrac{1}{3}\pi(R - r)\quad(R^2 + r^2 + Rr) =$

$= \dfrac{1}{3}\pi(R^3 - r^3)$. (*Ответ*: $\dfrac{1}{3}\pi(R^3 - r^3)$.)

**№ 3.** (рис. 12).

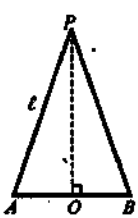



*Рис. 12*

$\Delta APB$ – осевое сечение конуса. $V = \dfrac{1}{3}\pi AO^2 \cdot PO$. $C = 2\pi R$, $R = \dfrac{C}{2\pi}$, $AO = \dfrac{C}{2\pi}$. Из $\Delta APO$ ($\angle O = 90°$): по теореме Пифагора $l^2 = AO^2 + PO^2$, $PO^2 = l^2 - \dfrac{C^2}{4\pi^2}$.

$PO = \sqrt{l^2 - \dfrac{C^2}{4\pi^2}}$,

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{C^2}{4\pi^2} \cdot \sqrt{l^2 - \frac{C^2}{4\pi^2}} = \frac{C^2}{12\pi}\sqrt{l^2 - \frac{C^2}{4\pi^2}}.$$ (*Ответ*: $V = \dfrac{C^2}{12\pi}\sqrt{l^2 - \dfrac{C^2}{4\pi^2}}$.)

**V. Подведение итогов**

– Как найти объем усеченного конуса?

– Отметим, что формула объема усеченного конуса такая же, как и формула объема усечённой пирамиды.

Записать домашнее задание.

П. 70. № 701, 704, 709.

$V=\frac{1}{3}h\,(S+S_1+\sqrt{S\cdot S_1})$ – вывести самостоятельно.

$y=\frac{R-r}{H}x+r$ – вывести самостоятельно.

*Дополнительная задача*: Равносторонний треугольник вращается вокруг своей стороны $a$. Найдите объем полученного тела вращения.

## Урок 45. Решение задач на нахождение объема конуса

*Цели урока:*

– закрепить знания и умения по теме «Объем конуса»;
– совершенствовать навыки решения задач.

### Ход урока

**I. Организационный момент**

Сообщить тему урока, сформулировать цели урока.

**II. Актуализация знаний учащихся**

1. Проверка домашнего задания: у доски – № 708, дополнительная задача, вывод формулы $V_к$ и $V_{ус.к.}$; с места – № 701, 704.
2. Решение задач по готовым чертежам.
3. Решение задач у доски и в рабочих тетрадях.

**III. Самостоятельная работа с последующей самопроверкой**

**IV. Подведение итогов**

1. Записать домашнее задание.

П. 70, № 702, 705, 703.

***Домашняя контрольная работа*** (см. приложение)

Дети получают ксерокопии домашних контрольных задач.

1. Проверка домашнего задания.

***Задача № 701.*** Пусть $h$, $r$ и $V$ соответственно высота, радиус основания и объем конуса. Найдите: а) $V$, если $h=3$ см, $r=1{,}5$ см; б) $h$, если $r=4$ см, $V=48\pi$ см$^3$; в) $r$, если $h=m$, $V=p$.

*Решение*:

а) $V=\frac{1}{3}\pi rh$. $V=\frac{1}{3}\pi\cdot 1{,}52\cdot 3=2{,}25\pi$ (см$^3$). (*Ответ*: $V=2{,}25\pi$ см$^3$.)

б) из формулы $V=\frac{1}{3}\pi r^2h$: $h=\frac{3V}{\pi r^2}\cdot h=\frac{3\cdot 48\pi}{\pi\cdot 4^2}=9$ (см).

(*Ответ*: $h=9$ см.)

в) из формулы $V=\frac{1}{3}\pi r^2h$: $r=\sqrt{\frac{3V}{\pi h}}$; $r=\sqrt{\frac{3p}{\pi m}}$. (*Ответ*: $r=\sqrt{\frac{3p}{\pi m}}$.)

***Задача № 708.*** Радиусы оснований усеченного конуса равны 3 м и 6 м, а образующая равна 5 м. Найдите объем конуса.

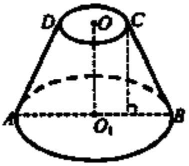


*Рис. 1*

*Дано*: усеченный конус, $r=O_1C=3$ м, $OB=R=6$ м, $CB=5$ м (рис. 1).

*Найти*: $V_{\text{ус.п.}}$

*Решение*: $V=\frac{1}{3}\pi h(R^2+r^2+Rr)$. Проведем $CC_1\perp AB$, $O_1C=OC_1=3$ м, $C_1B=6-3=3$ (м). Из $\Delta CBC_1$ ($\angle C_1=90°$) по теореме Пифагора $CB^2=CC_1{}^2+C_1B^2$, отсюда $CC_1{}^2=$ $=CB^2-C_1B^2$, $CC_1{}^2=5^2-3^2$, $CC_12=16$, $CC_1=4$. $V=\frac{1}{3}\pi\cdot4(6^2+3^2+$ $+6\cdot3)=84\pi$ (м$^3$).

***Задача № 704.*** *Дано*: конус, $h=SO=AB=H$ (рис. 2).

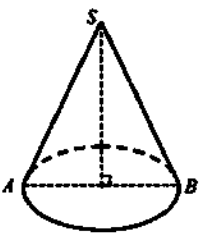


*Рис. 2*

*Найти*: V.

*Решение*: $V=\frac{1}{3}\pi r^2h$. $d=AB=H$, $D=2r$, $r=\frac{d}{2}=\frac{H}{2}$, $h=H$. $V=\frac{1}{3}\pi\frac{H^2}{4}\cdot H=\frac{1}{3}\pi\cdot\frac{H^3}{4}=\frac{\pi H^3}{12}$.

(*Ответ*: $V=\frac{\pi H^3}{12}$.)

***Дополнительная задача:*** Равносторонний треугольник вращается вокруг своей стороны $a$. Найдите объем полученного тела вращения.

*Дано*: $\Delta ABC$, $AB=BC=AC=a$, $AC$ – ось вращения (рис. 3).

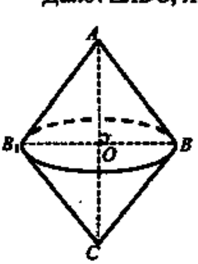


*Рис. 3*

*Найти*: объем тела вращения.

*Решение*: Объем тела вращения равен сумме объемов двух равных конусов. $V=2V_1$. $V=\frac{1}{3}\pi r^2h$. $H=AO=\frac{1}{2}AC=\frac{a}{2}$. $r=BO=\frac{a\sqrt{3}}{2}$ (из $\Delta AOB$ ($\angle O=90°$) по теореме Пифагора $a^2=BO^2=\frac{a^2}{4}$, $BO2=a^2-$ $-\frac{a^2}{4}=\frac{3a^2}{4}$). $V_1=\frac{1}{3}\pi\cdot\frac{3a^2}{4}\cdot\frac{a}{2}=\frac{\pi a^3}{8}$. $V=2\cdot\frac{\pi a^3}{8}=\frac{\pi}{4}a^3$. (*Ответ*: $V=\frac{\pi}{4}a^3$.)

Заслушать учащихся, выводивших формулы для $V_{\text{к}}$ и $V_{\text{ус.к.}}$.

2. Решение задач по готовым чертежам.

**№ 1.** Установите соответствие фигур и формул для нахождения объема (рис. 4 *а), б), в)*).

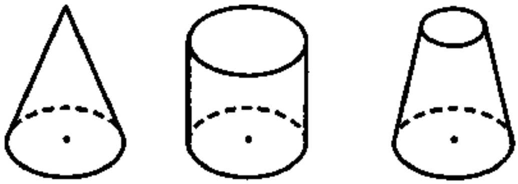



*Рис. 4*

а) $\pi rl$. 2. $4\pi D^2$. б) $\dfrac{\pi h}{3}(Rr + R^2 + r^2)$. в) $\dfrac{\pi R^2 h}{3}$

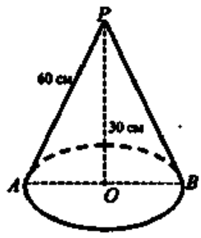



*Рис. 4*

**№ 2.** Образующая конуса равна 60 см, высота 30 см. *Найдите* $V_к$ (рис. 4).

*Решение*: Из $\Delta AOP$ ($\angle O = 90°$): Так как $PO = \dfrac{1}{2}AP$,

то $\angle A = 30°$, $R = AO = 60 \cdot \cos 30° = 60 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} =$

$= 30\sqrt{3}$ (см), $V = \dfrac{1}{3}\pi \cdot (30\sqrt{3})^2 \cdot 30 = 27000\pi$ (см$^3$).

(*Ответ*: $V = 27000\pi$ см$^3$.)

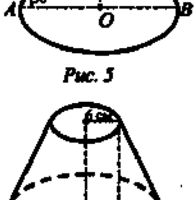



*Рис. 5*

**№ 3.** Образующая конуса, равна 12 см, наклонена к плоскости основания под углом 30° (рис. 5).

*Найдите* объем конуса.

*Решение*: $V = \dfrac{1}{3}\pi AO^2 \cdot SO$. Из $\Delta ASO$ ($\angle O = 90°$):

$H = SO = \dfrac{1}{2}AC = 6$ см. $R = AO = 12 \cdot \cos 30° = 12 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} =$

$= 6\sqrt{3}$ (см). $V = \dfrac{1}{3}\pi \cdot (6\sqrt{3})2 \cdot 6 = 216\pi$ (см$^3$).

(*Ответ*: $V = 216\pi$ см$^3$.)

**№ 4.** Радиус оснований усеченного конуса 6 см и 10 см. Образующая наклонена к плоскости большего основания под углом 60°.

*Найдите*; $V_{ус.к.}$.

*Дано*: $\alpha = 60°$, $R = 10$ см, $r = 6$ см (рис. 6).

*Найти*: $V_{ус.к.}$.

*Решение*: $V = \dfrac{1}{3}\pi H(R^2 + r^2 + Rr)$. $l = 8$ см,

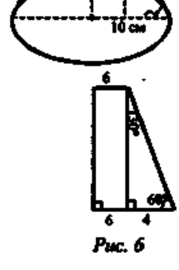



*Рис. 6*

$H = 8 \cdot \sin 60° = 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$ (см). $V = \frac{1}{3}\pi \cdot 4\sqrt{3}(10^2 + 6^2 + 10 \cdot 6) = \frac{784\sqrt{3}\pi}{3}$ (см$^3$).

(*Ответ*: $V = \frac{784\sqrt{3}\pi}{3}$ см$^3$.)

***№ 5.*** Образующая конуса 8 см, а угол при вершине осевого сечения 60°. *Найдите* объем конуса.

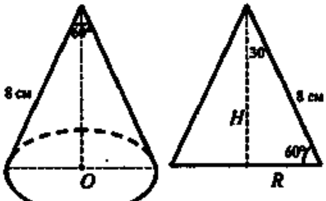


*Рис. 7*

*Решение:* (рис. 7): $V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$. $R = 4$ см.

$H = 8 \cdot \sin 60° = 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$ (см).

$V = \frac{1}{3}\pi \cdot 4^2 \cdot 4\sqrt{3} = \frac{64\sqrt{3}\pi}{3}$ (см$^3$).

(*Ответ*: $V = \frac{64\sqrt{3}\pi}{3}$ см$^3$.)

***№ 6.*** *Найдите* объем усеченного конуса, если его осевое сечение трапеция с основаниями 8 см, 6 см и высотой 3 см (рис. 8).

*Рис. 8*

*Решение*: $V = \frac{1}{3}\pi H(R^2 + r^2 + Rr)$.

$R = 4$ см, $r = 3$ см. $V = \frac{1}{3}\pi \cdot 3(4^2 + 3^2 + 4 \cdot 3) = 37\pi$ (см$^3$). (*Ответ*: $V = 37\pi$ см$^3$.)

3. Решение задач у доски и в рабочих тетрадях.

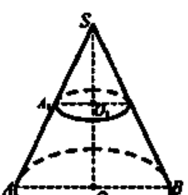


*Рис. 9*

***№ 1.*** Доказать, что если прямой круговой конус пересечь плоскостью, параллельной основанию, то площади сечения и основания будут относиться как квадраты их расстояний от вершины.

*Дано*: конус, S – площадь основания, $S_1$ – площадь сечения (рис. 9).

*Доказать*: $\frac{S_1}{S} = \frac{SO_1^2}{SO^2}$.

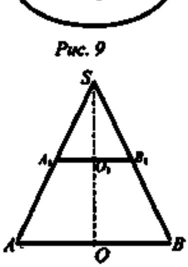


*Рис. 10*

*Решение*: Сечением прямого кругового конуса плоскостью, параллельной основанию, является круг. Осевым сечением конуса является равнобедренный треугольник.

Из подобия $\Delta ASB$ и $\Delta A_1SB_1$ (рис. 10) находим $\frac{O_1A_1}{OA} = \frac{SO_1}{SO}$, следовательно, $\frac{S_1}{S} = \frac{\pi O_1A_1^2}{\pi OA^2} = \frac{SO_1^2}{SO}$.

Что и требовалось доказать.

(*Ответ*: задача доказана.)

**№ 2.** Разность между образующей конуса и его высотой равна $d$, а угол между ними равен $\alpha$. Найдите объем конуса.

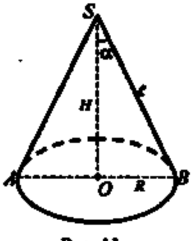


*Рис. 11*

*Дано*: конус, $SO$ – высота, $SB$ – образующая. $SB - SO = d$, $\angle BSO = \alpha$ (рис. 11).

*Найти*: $V$.

*Решение*: $V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$. $R = OB$, $H = SO$, $V = \frac{1}{3}\pi OB^2 SO$.

Из $\Delta SOB$ ($\angle O = 90°$): $SO = R\mathrm{ctg}\alpha$, $SB = \dfrac{R}{\sin\alpha}$. По условию $SB - SO = d$.

Имеем $\dfrac{R}{\sin\alpha} - \dfrac{R\cos\alpha}{\sin\alpha} = d$, $\dfrac{R(1-\cos\alpha)}{\sin\alpha} = d$, $\mathrm{R}\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2} = d$, $\mathrm{R} = d\mathrm{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$.

Итак, $V = \frac{1}{3}\pi d^2 \mathrm{ctg}^2\frac{\alpha}{2} \cdot d\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2} \cdot \mathrm{ctg}\alpha = \frac{1}{3}\pi d^3 \mathrm{ctg}^3\frac{\alpha}{2}\mathrm{ctg}\alpha$.

(*Ответ*: $\mathrm{V} = \frac{1}{3}\pi d^3 \mathrm{ctg}^3\frac{\alpha}{2}\mathrm{ctg}\alpha$.)

**№ 3.** Усеченный конус, у которого $R_1 = 22$ см, $R = 4$ см, требуется превратить в равновеликий цилиндр такой же высоты. Чему равен радиус основания этого цилиндра?

*Дано*: цилиндр, усеченный конус, $R_1 = 22$ см, $R_2 = 4$ см, $V_ц = V_к$.

*Найти*: $R$ (радиус цилиндра).

*Решение*: $H$ – общая высота тел, $R$ – радиус цилиндра. $V_ц = V_к$,

$\pi R^2 H = \frac{1}{3}\pi H\ (R_1^2 + R_2^2 + R_1 R_2)$, $R^2 = \frac{1}{3}(R_1^2 + R_2^2 + R_1R_2)$, $R^2 = \frac{1}{3}(222 + 4^2 + {}$

${} + 2^2 \cdot 4)$, $R^2 = 196$, $R = 14$. (*Ответ*: $R = 14$ см.)

***Самостоятельная работа*** (см. приложение)

*Ответы к задачам самостоятельной работы:*

*Вариант I.* $V = 24\pi$ см$^3$. $\qquad \mathrm{V} = 9\pi$ м$^3$

*Вариатн II.* $V = 63\sqrt{3}\pi$ см$^3$. $\qquad V = \dfrac{\pi^2}{3}(R^3 - r^3)$.

*Решение самостоятельной работы*

***Вариант I***

**№ 1.** $V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$, $\mathrm{R} = OB$, $\mathrm{H} = SO$, $V = \frac{1}{3}\pi OB2SO$. Из $\Delta CBD$ ($\angle D = 90°$):

$CB = \dfrac{CD}{\sin 60°}$, $CB = 4\sqrt{3}$ см, $OB = 2\sqrt{3}$ см. Из $\Delta SCB$: $\angle C = \angle S = \angle B = 60°$, $B = {}$

${} = CB = 4\sqrt{3}$ см. Из $\Delta SOB$ ($\angle O = 90°$): $SO = 6$ см. $V = \frac{1}{3}\pi(2\sqrt{3})^2 \cdot 6 = 24\pi$ (см$^3$).

(*Ответ*: $V = 24\pi$ см$^3$.)

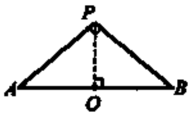


*Рис. 14*

**№ 2.** *Дано*: конус, $\Delta APB$ – осевое сечение, $AP = PB$, $\angle P = 90°$. $S_{\Delta APB} = 9$ м$^2$ (рис. 14).

*Найти*: $V_К$.

*Решение*: $V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$. $H = PO$, $R = AO$, $V = \frac{1}{3}\pi AO^2 PO$. $l$ – образующая конуса, $\angle A + \angle B = 90°$, $\angle A = \angle B = 45°$. Из $\Delta APO$ ($\angle O = 90°$): $\angle APO = \angle PAO = 45°$, значит, $AO = PO = R = H$. $S_{\Delta APB} = \frac{l^2}{2}$, $\frac{l^2}{2} = 9$, $l2 = 18$, $l = 3\sqrt{2}$. По теореме Пифагора $2AO^2 = l^2$, $AO^2 = 9$, $AO = 3$. $R = H = 3$ м. $V = \frac{1}{3}\pi \cdot 3^2 \cdot 3 = 9\pi$ (м$^3$). (*Ответ*: $V = 9\pi$ м$^3$.)

***Вариант II***

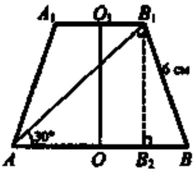


*Рис. 15*

**№ 1.** *Дано*: усеченный конус, $BB_1 = 6$ см, $\angle BAB_1 = 30°$, $\angle AB_1B = 90°$ (рис. 15).

*Найти*: $V_{ус.к.}$

*Решение*: $V = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + r^2 + Rr)$, $AB = 12$ см, $R = OB = 6$ см, $\angle ABB_1 = 60°$. Проведем $B_1B_2 \perp AB$. Из $\Delta BB_1B_2$($\angle B_2 = 90°$): $\angle B_1 = 30°$, значит, $BB_2 = 3$ см, тогда, $R = OB_1 = OB_2 = 6 - 3 = 3$ (см). $H = B_1B_2 = 3\sqrt{3}$ см. $V = \frac{1}{3}\pi \cdot 3\sqrt{3}(36+9+18) = 63\sqrt{3}\pi$ (см$^3$).

(*Ответ*: $V = 63\sqrt{3}\pi$ см$^3$.)

***Решение домашней работы***

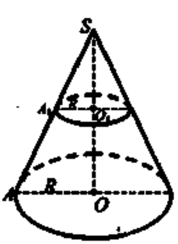


*Рис. 16*

**№ 702.** *Дано*: конус, $PO = 5$ см, $PO_1 = 2$ см, $V_1 = 24$ см$^3$ (рис. 16).

*Найти*: $V_к$.

*Решение*: $H = PO$ – высота конуса, $V_1$ – объем меньшего конуса, $AO = R$, $A_1O_1 = R$. $\Delta PO_1A_1 \sim \Delta POA$, тогда, $\frac{PO_1}{A_1O_1} = \frac{PO}{AO}$, $\frac{2}{r} = \frac{5}{R}$, $R = \frac{5}{2}r$. $V_1 = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot PO_1$, $24 = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot PO_1$, $R^2 = \frac{24 \cdot 3}{2\pi} = \frac{36}{\pi}$, $R = \frac{6}{\sqrt{\pi}}$. $R = \frac{5}{2} \cdot \frac{6}{\sqrt{\pi}} = \frac{15}{\sqrt{\pi}}$. $V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$, $V = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{15}{\sqrt{\pi}}\right)^2 \cdot 5 = \frac{1}{3}\pi\frac{225}{\pi} \cdot 5 = 375$ (см$^3$).

(*Ответ*: $V = 375$ см$^3$.)

**№ 705.** *Дано*: конус, $\Delta ASB$ – осевое сечение, $S_{\Delta ASB} = 60$ см$^2$, $SB = SA = 13$ см (рис. 17).

*Найти*: $V_к$.

$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$, $H = SO$, $R = OB$, $SB = l = 13$, $AB = 2R$. Из $\Delta SOB$ ($\angle O = 90°$):

$SO = H = \sqrt{l^2 - R^2} = \sqrt{169 - R^2}$, (1). $S_{\Delta ASB} = \frac{1}{2} H \cdot AB = \frac{1}{2} H \cdot 2R = HR$. $60 = HR$,

$H = \frac{60}{R}$ (2). Из (1) и (2): $\frac{60}{R} = \sqrt{169 - R^2}$; $\frac{3600}{R^2} = 169 - R^2$;

$\frac{R^4 - 169R^2 + 3600}{R^2} = 0$; $R^4 - 169R^2 + 3600 = 0$, $D = 119$,

$R_1^2 = 144$, $R_1 = 12$. $R_2^2 = 25$, $R_2 = 5$. При $R = 12$, $H = 5$,

тогда $V = \frac{1}{3}\pi \cdot 122 \cdot 5 = 240\pi$ (см$^3$). При $R = 5$, $H = 12$,

тогда $V = \frac{1}{3}\pi \cdot 52 \cdot 12 = 100\pi$ см$^3$. (*Ответ*: $240\pi$ см$^3$ или $100\pi$ см$^3$.)

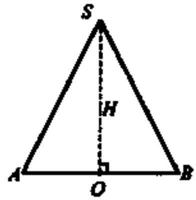



*Рис. 17*

*№ 703. Дано*: конус, $S_{осн.} = Q$, $S_{бок.} = P$ (рис. 18).

*Найти*: $V_к$.

*Решение*: $V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$, где $R$ – радиус основания, $H$ – высота. $Q = \pi R^2$, $R^2 = \frac{Q}{\pi}$, $R = \sqrt{\frac{Q}{\pi}}$. $S_{бок.} = \pi Rl$, $l$ – образующая, $\pi Rl = P$, $l = \frac{P}{\pi r} = \frac{P}{\sqrt{\frac{\pi^2 Q}{\pi}}} = \frac{P}{\sqrt{\pi Q}}$.

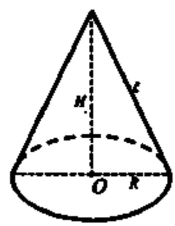



*Рис. 18*

$H = \sqrt{l^2 - r^2}$, $H = \sqrt{\frac{P^2}{\pi Q} - \frac{Q}{\pi}} = \sqrt{\frac{P^2 - Q^2}{\pi Q}}$,

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{Q}{\pi} \cdot \sqrt{\frac{P^2 - Q^2}{\pi Q}} = \frac{1}{3} Q \sqrt{\frac{P^2 - Q^2}{\pi Q}} =$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{\frac{Q^2(P^2 - Q^2)}{\pi Q}} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{Q \cdot \pi(P^2 - Q^2)}{\pi^2}} = \frac{\sqrt{\pi Q(P^2 - Q^2)}}{3\pi}.$$

(*Ответ*: $V = \frac{\sqrt{\pi Q(P^2 - Q^2)}}{3\pi}$.)

***Решение домашней контрольной работы***

*№ 1. Дано*: $\Delta ABC$, $AC = BC = a$, $\angle C = \alpha$. $l \parallel CB$, $l$ – ось вращения (рис. 19).

*Найти*: объем полученного тела вращения.

*Решение*: Проведем $CL \parallel l$ и $BK \perp l$, тогда $V_{тела} = V_ц - V_1 - V_2$, где $V_ц$ – объем цилиндра, полученного вращением прямоугольника $KBCL$, $V_1$ и $V_2$ – объемы конусов, об-

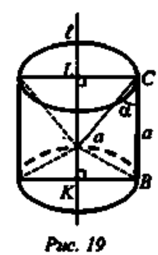



*Рис. 19*

разующихся вращением $\Delta AKB$ и $\Delta ALC$. $V_{тела}=\pi LC^2\cdot BC-- \frac{1}{3}\pi KB^2\cdot AK-\frac{1}{3}LC^2\cdot AL$, так как $LC=KB$, а $BC=AK+AL$, то $V_{тела}=\pi LC^2(BC-\frac{1}{3}BC)=\frac{2}{3}\pi LC^2\cdot BC$. $BC=a$, Из $\Delta ALC\,(\angle L=90°)$: $LC=a\sin\alpha$, поэтому $V=\frac{2}{3}\pi a^3\sin^2\alpha$. (*Ответ*: $V=\frac{2}{3}\pi a^3\sin^2\alpha$.)

**№ 2.** *Дано*: конус, $AP=\sqrt{6}$ см, $\angle PAB=45°$ (рис. 20).

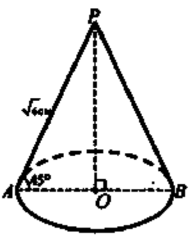


*Рис. 20*

*Найти*: V.

*Решение*: $V=\frac{1}{3}\pi R^2H$. $R=AO$, $H=PO$. Из $\Delta AOP$ $((\angle O=90°)$: $\angle APO=45°$, значит, $AO=PO=R=H$. По теореме Пифагора $2R^2=6$, $R^2=3$, $R=H=\sqrt{3}$. $V=\frac{1}{3}\pi\cdot(\sqrt{3})2\cdot\sqrt{3}=\frac{1}{3}\pi\cdot 3\cdot\sqrt{3}=\pi\sqrt{3}$ (см$^3$).

(*Ответ*: $V=\pi\sqrt{3}$ см$^3$.)

**№ 3.** *Дано*: цилиндр, конус, $OB=O_1B_1=2{,}5$ м, $SO_1=4$ м, $OO_1=2{,}2$ м, $\rho=0{,}03$г/см$^3$ (рис. 21).

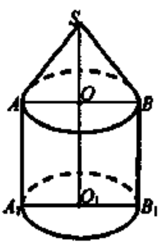


*Рис. 21*

*Найти*: *m*.

*Решение*: $R=0{,}03$ г/см$^3=\frac{30кг}{м^3}$. $m=RV$; где $V=V_ц+V_к$, $V_ц=\pi R^2H$, $V_к=\frac{1}{3}\pi R^2h$. $H=4-2{,}2=1{,}8$ (м). $V=R(V_ц+V_к)=$ $=R(\pi R^2H+\frac{1}{3}\pi R^2H)=R\pi R^2(H+\frac{1}{3}H)=30\cdot 3{,}14\cdot 2{,}52(2{,}2+$ $+\frac{1}{3}\cdot\frac{18}{10})=$ 1648,5 (кг) = 1,6 (т). (*Ответ*: 1,6 т – масса стога сена.)

**№ 4.** *Дано*: конус, $R$ – радиус основания, усеченный конус, $R$ – радиус основания (рис. 22).

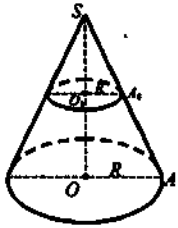


*Рис. 22*

*Найти*: $\frac{V_{ус.к.}}{V_п.}$

*Решение*: $V_{п.}=\frac{1}{3}\pi R^2H$, $R=OA$, $H=SO$. $V_{ус.к.}=$ $=\frac{1}{3}\pi(r^2+R^2+Rr)\cdot H$, $H=OO_1$. $SO_1=SO-OO_1=H-H$.

$\Delta SA_1O_1 \sim \Delta SAO$, значит, $\frac{r}{R}=\frac{H-h}{H}$, отсюда $H=\frac{Rh}{R-r}$.

$$V_п=\frac{1}{3}\pi R^2\cdot\frac{Rh}{R-r}=\frac{\frac{1}{3}\pi R^3h}{R-r}.\quad \frac{V_{ус.к.}}{V_п}=\frac{\frac{1}{3}\pi h(r^2+R^2+Rr)}{\dfrac{\frac{1}{3}\pi R^3h}{R-r}}=$$

$$=\frac{(R-r)(r^2+R^2+Rr)}{R^3}=\frac{R^3-r^3}{R^3}=1-\frac{r^3}{R^3}.$$ (*Ответ*: $\frac{V_{ус.к.}}{V_п}=1-\frac{r^3}{R^3}$.)

**№ 5.** *Дано*: два конуса, $O_1=O$ – центры оснований, $\angle ASO=\angle A_1S_1O_1=\alpha$, $OA=R$. $S_{бок.внут.}<S_{полн.внеш.}$ в 2 раза (рис. 23).

*Найти*: $V_{внутр.к.}$

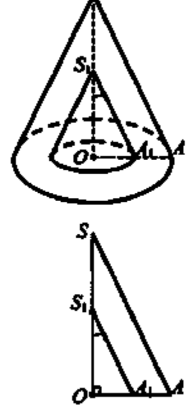


Рис. 23

*Решение*: Из $\Delta S_1OA_1$ ($\angle O=90°$): $OS_1=\frac{OA_1}{\mathrm{tg}\alpha}=OA_1\mathrm{ctg}\alpha$.

$S_1A_1=\frac{OA_1}{\sin\alpha}=l$. Из $\Delta SOA(\angle O=90°)$: $SA=\frac{R}{\sin\alpha}$.

$S_{полн.внут.}=2S_{бок.внут.}$, $S_{полн.}=\pi Rl$, $R=OA_1$, $S_{полн.}=S_{осн.}+$ $+S_{бок.}$ $2\pi\cdot OA_1\cdot\frac{OA_1}{\sin\alpha}=\pi\cdot OA_1^2+\pi\cdot OA\cdot\frac{OA}{\sin\alpha}$. $\frac{2\pi r^2}{\sin\alpha}=$

$=\frac{\pi R^2(1+\sin\alpha)}{\sin\alpha}$, $2R^2=R^2(1+\sin\alpha)$, $R^2=\frac{R^2(1+\sin\alpha)}{2}$,

$R=R\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{2}}$, то есть $OA_1=\frac{R}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)}=$

$=\frac{R}{\sqrt{2}}\sqrt{2\cos^2(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2})}=R\cos(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2})$. $V_{внут.кон.}=\frac{1}{3}\pi\cdot OA_1 2\cdot OS_1$. $V_{внут.кон.}=$

$=\frac{1}{3}\pi\,(R\cos(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}))^2\cdot(R\cdot\cos(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}))\cdot\mathrm{ctg}\alpha=\frac{1}{3}\pi R^3\cos(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2})\cdot\mathrm{ctg}\alpha.$

(*Ответ*: $V=\frac{1}{3}\pi R^3\cos^3(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2})\mathrm{ctg}\alpha$.)

## Урок 46. Контрольная работа № 4

*Цель урока*:

– проверить уровень сформированности навыков решения задач на нахождение объема цилиндра, призмы, пирамиды и конуса.

***Контрольная работа № 4*** (см. приложение)

***Ответы:***

Вариант $A_1$: № 1 – 24 см$^3$, № 2 – $\frac{8a^3}{3\sqrt{3}}\pi$.

Вариант $А_2$: № 1 – $\frac{81}{4}$ см$^2$, № 2 – $\frac{\pi a^3}{\cos^2 \alpha}$.

Вариант $Б_1$: № 1 – 1152 см3, № 2 – $\frac{\pi l^3 \sin^2 \alpha \cos \alpha}{6}$.

Вариант $Б_2$: № 1 – 864 см3, № 2 – $\frac{\pi H^3}{3tg^2 \alpha}$.

Вариант $В_1$: № 1 – $\frac{4}{3} l^3 \cos 2\alpha \sin \alpha$, № 2 – $\frac{\pi a^3 tg^2 \alpha \cdot tg\beta}{36}$.

Вариант $В_2$: № 1 – $\frac{2}{3} l^3 \cos^2 \alpha \sin \alpha$, № 2 – $\frac{2\pi b^3 \sin^2 \alpha tg\beta}{9}$.

## § 4. Объем шара и площадь сферы (уроки 47–54)

### Урок 47. Объем шара

*Цель урока:*

– вывести формулу объема шара, показать ее применение при решении задач.

### Ход урока

**I. Организационный момент**

Сообщить тему урока, сформулировать цели урока.

**II. Актуализация опорных знаний**

Теоретический опрос (фронтальная работа с классом).

– Дайте определение, что называется шаром, радиусом и диаметром шара?

– Дайте определение площади поверхности шара. Запишите формулу площади поверхности шара ($S = 4\pi R^2$).

**III. Изучение нового материала**

– Мы уже рассмотрели формулы для вычисления объемов некоторых многогранников и круглых тел. (На доске иллюстрации с изображением многогранников и круглых тел).

– Давайте вспомним и запишем под каждой фигурой уже известные нам формулы объемов.

$$V_{призмы} = S \cdot H, \qquad V_{цилиндра} = S_{осн.} \cdot H = \pi R^2 H,$$

$$V_{конуса} = \frac{1}{3}\pi RH, \qquad V_{пирамиды} = \frac{1}{3}S_{осн.} \cdot H.$$

Задумывались ли вы над таким вопросом: как давно появились эти формулы, и кто первым открыл их?

Еще до нашей эры формулы объемов многих тел (параллелепипеда, призмы и цилиндра) были известны.

Позднее, благодаря трудам древнегреческих ученых Демокрита, Евклида и Архимеда были открыты формулы для вычисления объемов пирамиды, конуса, шара и других тел.

В современных учебниках формулы для вычисления объемов пирамиды, конуса и шара выводятся на основе интегральной формулы. Но этот простой и изящный способ появился благодаря трудам И. Ноготыса и Г. Лейбница гораздо позднее того как были открыты сами формулы. Изучим и мы доказательство формулы $V_{шара} = \frac{4}{3}\pi R^3$.

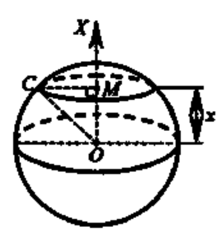


Рис. 1

(Показать портреты ученых, о которых было упомянуто в разговоре.)

Для доказательства используем метод координат, который ввел в геометрию Р. Декарт.

Рассмотрим шар радиуса $R$ с центром в точке $O$ и выберем ось $ox$ произвольным образом. Сечение шара плоскостью, перпендикулярной $ox$, является кругом с центром в т. $M \notin ox$ и радиусом $R$.

Обозначим площадь сечения S(x), где $x$ – абсцисса точки $M$.

Из $\Delta OMC$ $R = \sqrt{OC^2 - OM^2} = \sqrt{R^2 - x^2}$. Тогда $S(x) = \pi R^2 = \pi \cdot (R^2 - x^2)$,

где $-R \leq x \leq R$. $V = \int\limits_{-R}^{R} S(x)dx = \int\limits_{-R}^{R} \pi(R^2 - x^2)dx = \pi R^2 x\Big|_{-R}^{R} - \frac{\pi x^3}{3}\Big|_{-R}^{R} = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Теорема об объеме шара доказана.

В практических приложениях часто указывается диаметр шара, поэтому в процессе решения задач полезно использовать формулу:

$V = \frac{1}{6}\pi D^3$, где $D$ – диаметр шара.

**IV. Формирование умений и навыков учащихся**

1. Работа в рабочих тетрадях:

а) разобрать и записать решение задачи № 710 *в*) (краткое решение).

*Дано*: шар, $S = 64\pi$ см$^2$.

*Найти*: $R$ и $V$.

*Решение*: Так как $S = 4\pi R^2$, имеем $4\pi R^2 = 64\pi$, $R^2 = 16$, $R = 4$. Тогда $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 64 = \frac{256}{3}\pi$ см$^3$. (*Ответ*: $R = 4$ см, $V = \frac{256}{3}\pi$ см$^3$.)

б) задача № 712.

*Дано*: $V_{шара} = V_{цил.}$, $D_{шара} = D_{цил.}$

*Выразить* $H_{цил.}$ через $R$.

*Решение.* $\frac{4}{3}\pi R^3 = \pi R^2 H$. $\frac{4}{3}R = H$. (*Ответ*: $H = \frac{4}{3}R$.)

в) разобрать и записать в тетрадях вопрос № 9 к главе VII (стр. 161). (*Ответ*: $\frac{R_1}{R_2} = \frac{1}{2}$; $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{8}$.)

*Дополнительная задача.*

На надгробном камне могилы Архимеда в Сиракузах изображен цилиндр с вписанным в него шаром. Это символ открытия формул объема шара и площади сферы, а также важного вывода, что «объем шара, вписанного в цилиндр, в … раз меньше объема цилиндра и что также относятся поверхности этих тел». Найдите отношение объема шара к объему цилиндра и отношение площади шара к площади поверхности цилиндра.

*Решение*: Вспомнив формулы, о которых говорилось в условии задачи, запишем отношение

$$\frac{V_{шара}}{V_{цилин.}} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{\pi R^2 \cdot 2R} = \frac{2}{3}; \quad \frac{S_{шара}}{S_{цил.}} = \frac{4\pi R^2}{2\pi R \cdot 2R + 2\pi R^2} = \frac{2}{3}.$$

Эти отношения и соотношения следует выделить и запомнить.

**V. Подведение итогов**

– Чему равно отношение объема шара к объему цилиндра, если их радиусы равны?

---

**Домашнее задание**

П. 71 № 710 *а*), *б*); 711, 713 (выучить доказательство теоремы).

*Дополнительная задача:* Из деревянного равностороннего цилиндра выточен наибольший возможный шар. Сколько процентов материала сточено?

*Решение*:

1) Из условия задачи вытекает, что высота цилиндра $H = 2R$, подставим значение $H$ в формулу объема цилиндра: $V_{цил.} = \pi R^2 H = 2\pi R^3$.
2) Объем шара $V_{шара} = \frac{4}{3}\pi R^3$.
3) Найдем, сколько сточено материала: $V_{ц.} - V_{шара} = 2\pi R^3 - \frac{4}{3}\pi R^3$.
4) Найдем, сколько % составляет сточенный материал: $\frac{\frac{2}{3}\pi R^3 \cdot 100\%}{2\pi R^3} =$

$= \frac{100\%}{3} = 33\frac{1}{3}\%$. (*Ответ*: $33\frac{1}{3}\%$.)

## Урок 48. Объем шара

*Цель урока:*

– совершенствовать навыки решения задач на применение формул для вычисления объема шара.

### Ход урока

**I. Организационный момент**

**II. Актуализация знаний учащихся**

Три ученика вызываются к доске и получают задания:

а) вывести формулу для вычисления объема шара;

б) кратко записать решение домашнего задания № 710 *а*), *б*), 711;

в) краткое решение № 713.

***Задача № 710 а).*** *Дано*: $R = 4$ см. $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, $S = 4\pi R^2$.

*Найти*: $V$ и $S$.

*Решение*. $V = \frac{4}{3}\pi \cdot 64 = \frac{256}{3}\pi$ (см$^3$), $S = 4\pi \cdot 16 = 64\pi$ (см$^2$).

(*Ответ*: $V = \frac{256}{3}\pi$ см$^3$, $S = 64\pi$ см$^2$.)

***Задача № 710 б).*** *Дано*: $V = 113{,}04$ см$^3$.

*Найти*: $S$.

*Решение*. $R^3 = \frac{3V}{4\pi} = \frac{3 \cdot 113{,}04}{4\pi} = \frac{339{,}12}{4\pi} \approx 27$. $R = \sqrt[3]{27} = 3$ см, $S = 4\pi R^2 =$ $= 36\pi$ см$^2$. (*Ответ*: $36\pi$ см$^2$.)

***Задача № 711.***

*Решение*: $V_з = \frac{4}{3}\pi R_з^3$, $D_з = 2R_з$, $V_з = \frac{4}{3}\pi \cdot \frac{D_з^3}{8} = \frac{\pi D_з^3}{6}$. $V_л = \frac{4}{3}\pi R_л^3$, $D_л = 2R_л$, $V_л = \frac{\pi D_л^3}{6}$. $\frac{V_з}{V_л} = \frac{D_з^3}{D_л^3}$, если $D_з = 4D_л$, то $\frac{V_з}{V_л} = \frac{4D_л^3}{D_л^3} = 4$.

(*Ответ*: в 4 раза.)

***Задача № 713.***

*Решение*: $h = 12$ см, $r = \frac{5}{2} = 2{,}5$ см. $V_к = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot 6{,}25 \cdot 12 = 25\pi$ см$^3$. $V_ш = \frac{4}{3}\pi R^3$; $R = \frac{D}{2}$, $V_ш = \frac{\pi D^3}{6}$, $D = 5$ см. (*Ответ*: $\frac{125}{6}\pi$ см$^3$.)

Надо сравнить объемы конуса и шара: $25\pi$ и $\frac{125}{6}\pi$, 150 и 125. Так как $150 > 125$, то $25\pi > \frac{125\pi}{6}$, $V_к > V_ш$, то есть растаявшее мороженое уместится в стаканчике.

Пока ученики готовятся у доски, остальным учащимся предлагается ответить на вопросы математического диктанта через копирку. Предлагается два варианта.

***Математический диктант.***

1. Вычислите объем шара, если его радиус $R = 6$ см. [$R = 5$ см].
2. Вычислите диаметр шара, если его объем $V = 36\pi$. [$V = \dfrac{32\pi}{3}$].
3. Объем шара равен $\dfrac{256\pi}{3}$ см$^3$. [$288\pi$ см$^3$]. Найдите площадь большего круга [длину окружности большего круга].
4. В цилиндр вписан шар радиуса $R = 1$ [$R = 2$]. Найдите отношение $V_{цил.} : V_{шара}$ [$V_{шара} : V_{цил.}$].
5. Для вычисления объема шара ученик предложил свою формулу $V = 2\int\limits_0^R \pi(R^2 - x^2)dx$. [$V = 2\int\limits_{-R}^0 \pi(R^2 - x^2)dx$].

Какие он должен дать пояснения, подтверждающие правильность этой формулы?

Ответы к математическому диктанту:

*Вариант I* 1. $228\pi$; 2. 3; 3. $16\pi$; 4. $\dfrac{2}{3}$ 5.

*Вариант II* 1. $\dfrac{500\pi}{3}$; 2. 2; 3. $12\pi$; 4. $\dfrac{2}{5}$ 5.

Проверяются ответы на вопросы диктанта, слушается доказательство, проверяется домашнее задание.

**III. Формирование умения и навыков учащихся**

1. Разобрать и решить задачу. Один из учащихся решает задачу у доски, остальные в тетрадях. Учитель контролирует правильность решения, при необходимости задает наводящие вопросы.


*Рис. 1*

*Задача.* Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна $10\sqrt{3}$, а угол боковой грани с плоскостью основания равен 60°. Найдите объем шара, вписанного в пирамиду (рис. 1).

*Решение*: Рассмотрим сечение, проведение через высоту пирамиды и две апофемы. В сечении получается $\Delta ABC$ – равносторонний. Радиус вписанной в него окружности будет равен $r = \dfrac{a}{2\sqrt{3}}$.

$r = \dfrac{10\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = 5$ (см). $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{4}{3}\pi R5^3 = \dfrac{500}{3}\pi$. (*Ответ*: $V = \dfrac{500}{3}\pi$.)

2. Подробно разбирается решение задачи у доски и записывается учениками в тетрадях.

*Задача.* В шар вписана правильная треугольная призма так, что ее высота вдвое больше стороны основания. Найдите объем шара, если объем призмы равен $\dfrac{27}{\pi}$ (рис. 2).

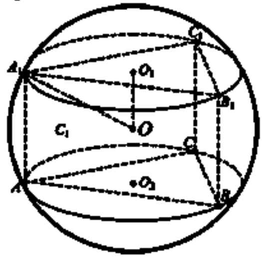



*Рис. 2*

*Решение*:

1) Пусть $x$ – сторона основания. Тогда высота призмы $2x$. Ее объем $V = S_{осн.} \cdot h$. $V = \dfrac{x^2\sqrt{3}}{4} \cdot 2x$, $V = \dfrac{x^3\sqrt{3}}{2}$. По условию $V = \dfrac{27}{\pi}$. $\dfrac{x^3\sqrt{3}}{2} = \dfrac{27}{\pi}$; $x^3 = \dfrac{54}{\pi\sqrt{3}}$; $x = 3\sqrt[3]{\dfrac{2}{\pi\sqrt{3}}}$.

2) Радиус $R$ найдем из $\Delta OO_1A_1$. $O_1A_1$ – радиус описанной окружности около треугольника $A_1B_1C_1$. $O_1A_1 = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$, $O_1A_1 = \sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{\dfrac{2}{\pi\sqrt{3}}} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt[6]{3}} \cdot \sqrt[3]{\dfrac{2}{\pi}} = \sqrt[3]{\dfrac{6}{\pi}}$.

$OO_1 = x = 3\sqrt[3]{\dfrac{2}{\pi\sqrt{3}}}$ так как $O$ – середина $O_1O_2$. $R = OA_1 =$

$$= \sqrt{\left(\sqrt[3]{\frac{6}{\pi}}\right)^2 + \left(\sqrt[6]{3^5} \cdot \sqrt[3]{\frac{2}{\pi}}\right)^2} = \sqrt{\left(\sqrt[3]{\frac{6}{\pi}}\right)^2 + \left(\sqrt[6]{3^3}\sqrt[6]{3^2} \cdot \sqrt[3]{\frac{2}{\pi}}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\sqrt[3]{\frac{6}{\pi}}\right)^2 + \left(\sqrt{3}\sqrt[3]{\frac{6}{\pi}}\right)^2} = \sqrt[3]{\frac{6}{\pi}} \cdot \sqrt{1+3} = 2\sqrt[3]{\frac{6}{\pi}}.$$

Объем шара $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$,

$V = \dfrac{4}{3}\pi \cdot 8 \cdot \dfrac{6}{\pi} = 64$. (*Ответ*: $V = 64$.)

3. Один ученик решает задачу у доски, остальные записывают решение в тетрадях.

*Задача.* В конус, осевое сечение которого равносторонний треугольник, вписан шар. Найти объем шара, если объем конуса равен 27 (рис. 3).

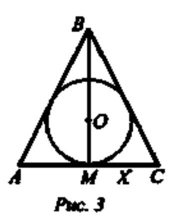



*Рис. 3*

*Решение*: В осевом сечении комбинации тел получим равносторонний треугольник (по условию) и вписанный в него круг.

Радиус шара равен радиусу круга, а диаметр основания конуса равен стороне $AC$ треугольника. Пусть $x$ – радиус основания конуса. Тогда $AC = 2x$, высота $BM = x\sqrt{3}$ (из $\Delta BMC$).

Объем конуса $V=27$. $\frac{1}{3}\pi x^3\sqrt{3}=27$. $x^3=\frac{27\sqrt{3}}{\pi}$, $x=\frac{3\sqrt[3]{\sqrt{3}}}{\sqrt[3]{\pi}}$. (*Ответ*: $AC=\frac{6\sqrt[3]{\sqrt{3}}}{\sqrt[3]{\pi}}$.)

Радиус окружности, вписанной в треугольник, найдем по формуле $R=\frac{a}{2\sqrt{3}}$, $R=\frac{6\sqrt[6]{3}}{\sqrt[3]{\pi}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{3}}=\frac{3\sqrt[6]{3}}{\sqrt[3]{\pi}\cdot\sqrt[6]{3^3}}=\frac{3}{\sqrt[3]{\pi}\cdot\sqrt[6]{3^3}}=\sqrt[3]{\frac{9}{\pi}}$. Наконец, объем шара $V=\frac{4}{3}\pi R^3$, $V=\frac{4}{3}\pi\cdot\frac{9}{\pi}$, $V=12$. (*Ответ*: $V=12$.)

**IV. Подведение итогов**

– Назовите форму для вычисления объема шара.

Оценить работу учащихся на уроке.

---

**Домашнее задание**

Вопрос № 11 (стр. 161), № 753, 754.

Дополнительные задачи.

***I уровень***

Внешний диаметр полого шара 18 см, толщина стены 3 см. Найдите объем материала, из которого изготовлен шар.

*Решение*: $V=\frac{\pi D^3}{6}$; $V_{внеш.}=\frac{\pi 18^3}{6}$; $V_{внут.}=\frac{\pi(18-6)^2}{6}$. $V_{мат.}=V_{вп.}-V_{внут.}=$ $=\frac{\pi 18^3}{6}-\frac{\pi\cdot 12^3}{6}=684\pi$ см$^3$. (*Ответ*: $684\pi$ см$^3$.)

***II уровень***

Диаметр свинцового шара равен 30 см.

Сколько шариков, диаметр которых 3 см, можно сделать из этого свинца?

*Решение*: $n=\frac{V_1}{V_2}$, $V_1=\frac{\pi D^3}{6}=\frac{\pi\cdot 30^3}{6}=\frac{\pi\cdot 27000}{6}$. $V_2=\frac{\pi\cdot 3^3}{6}=\frac{\pi\cdot 27}{6}$.

$n=\frac{V_1}{V_2}=1000$ (шариков).

## Урок 49. Объем шарового сегмента, шарового слоя, сектора

*Цели урока:*

- познакомить учащихся с формулами для вычисления объемов частей шара;
- научить учащихся решать задачи на применение формул объемов частей шара.

## Ход урока

### I. Организационный момент

### II. Актуализация опорных знаний учащихся

- Площадь круга. Длина окружности. ($S = \pi R^2$, $C = 2\pi R = \pi D$).
- Что называется сектором круга? Его площадью?

  (Круговым сектором называется часть круга, ограниченная дугой и двумя радиусами, соединяющими концы дуги с центром круга. $S_{\text{кр.сек.}} = \dfrac{\pi R^2}{360} \cdot \alpha$.)
- Что называется сферой? Шаром? Центром, радиусом и диаметром шара? (Сферой называется поверхность, состоящая из всех точек пространства, расположенных на даном расстоянии от данной точки.)

  (Шаром называется тело, которое содержит все точки пространства, расположенные от точки $O$ на расстоянии, не превышающем R, и не содержит других точек.)
- Что является сечением сферы? Шара? (Окружность, круг.)
- Что называется большим кругом шара?
- Объем шара.

### III. Формирование новых знаний учащихся

1. **Шаровым сегментом называется часть шара, отсеченная от него какой-нибудь плоскостью** (рис. 1 *а*) и *в*)).

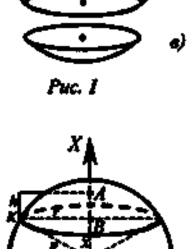



*Рис. 1*

Круг, получившийся в сечении, называется основанием двух получившихся при этом сегментов.

Сегмент, в переводе с латинского (segmentum) отрезок (круга).

Длины отрезков $AB$ и $BC$ (рис. 2) диаметра $AC$, перпендикулярного секущей плоскости, называются высотами сегмента.

Если $AB = h$, а $R$ – радиус шара, то $V_{\text{сегм.}} = \pi h^2(R - \frac{1}{3}h)$. $V_{\text{сегм.}} = \pi h^2(R - \frac{1}{3}h)$.

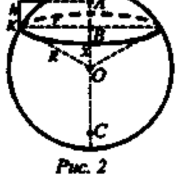



*Рис. 2*

Докажем справедливость формулы (рис. 2). Проведем ось $OX$ перпендикулярно плоскости $\alpha$. Тогда площадь сечения $S(x) = \pi(R_2 - x_2)$, при $R - \alpha \le x \le R$.

Рассмотрим $\Delta KBO$ ($\angle\beta = 90°$; $BO = x$; $KO = R$). По основной формуле для вычисления объемов тел получим

$$V = \pi \int_{R-h}^{R} (R^2 - x^2)dx = \pi h^2 (R - \frac{1}{3}h).$$

$$V_{\text{сегм}} = \pi h^2 \left(R - \frac{1}{3}h\right).$$

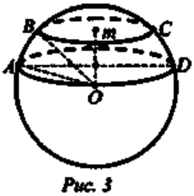


Рис. 3

**2. Шаровым слоем называется часть шара, заключенная между двумя параллельными секущими плоскостями.**

Круги, получившиеся в сечении шара этими плоскостями, называются основаниями слоя, а расстояние между плоскостями – высотой шарового слоя.

$$V_{\text{сл.}} = V_{\underset{AmD}{\text{сегм.}}} - V_{\underset{BmC}{\text{сегм}}}$$

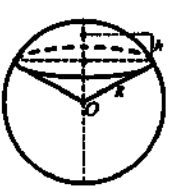


Рис. 4

**3. Шаровым сектором называется тело, полученное вращением кругового сектора с углом меньшим 90°, вокруг прямой, содержащей один из ограничивающих круговой сектор радиусов** (рис. 4).

$$V = \frac{2}{3}\pi R^2 h$$

Сектор (от латинского sectio) – сечь, отделять, расчленять, делать отдельным.

## IV. Формирование умений и знаний учащихся

*Задача № 716.* Работа в рабочих тетрадях. Один из учеников работает у доски, остальные в тетрадях (рис. 5).

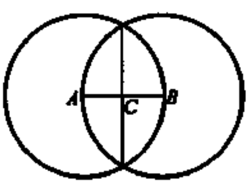


Рис. 5

*Решение*:

1) Обозначим радиус шара через R, тогда $AC = BC = \frac{R}{2}$. Общая часть шаров состоит из двух равных шаровых сегментов с высотой $h = \frac{R}{2}$.

2) $V_{\text{сегм.}} = \pi h^2 (R - \frac{1}{3}h)$. $V_{\text{сегм.}} = \pi \frac{R^2}{4}(R - \frac{R}{6}) = \frac{5\pi R^3}{24}$.

3) $V = 2 \cdot V_{\text{сегм.}} = \frac{5\pi R^3}{12}$. $\frac{V}{V_{\text{шара}}} = \frac{5\pi R^3}{12} : \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{5}{16}$.

(*Ответ*: $\frac{5}{16}$.)

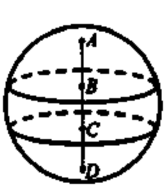


Рис. 6

*Задача № 718.* Учащиеся работают самостоятельно, затем один из учащихся читает свое решение и записывает его на доске, остальные проверяют, исправляют ошибки (рис. 6).

*Дано*: шар, $AD$ – диаметр, $AB = BC = CD$, $R$ – радиус шара.

*Найти*: $V_{слоя}$.

*Решение*: $V_{слоя} = V_{сегм.1} - V_{сегм.2}$. $V_{сегм.1}$ = объем сегмента с высотой $AC$. $AC = \frac{4R}{3}$. $V_{сегм.2}$ = объем сегмента с высотой $AB$, $AB = \frac{2R}{3}$. $V_{слоя} =$

$$= \pi\left(\frac{4R}{3}\right)^2\left(R - \frac{1}{3}\cdot\frac{4R}{3}\right) - \pi\left(\frac{2R}{3}\right)^2\left(R - \frac{1}{3}\frac{2R}{3}\right) =$$

$$= \pi\cdot\frac{16R^2}{9}\cdot\frac{5R}{9} - \pi\frac{4R^2}{9}\cdot\frac{7R}{9} = \pi\frac{4R^3}{81}\cdot(20-7) = \frac{52R^3\pi}{81}.$$

(*Ответ*: $\frac{52R^3\pi}{81}$.)

***Задача № 721.***

Подробный разбор задачи и запись ее в тетради (рис. 7).

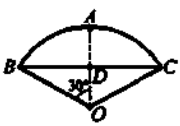


*Рис. 7*

*Решение*: Пусть круговой сектор $OAB$ вращается около радиуса $OA$. В сечении получившегося шарового сектора плоскостью $OAB$ получится еще один круговой сектор $OAC$, симметричный исходному относительно прямой $AO$ и имеющий тот же угол 30°. Угол $BOC$ равен 60°, $OB = OC = h$, поэтому $\Delta BOC$ правильный, причем его сторона $BC$ отсекает от радиуса $OA$ отрезок $AD$, равный высоте $H$ соответствующего шаровому сектору сегмента. Найдем ее: $H = AD = OA - OD = R - R\frac{\sqrt{3}}{2} = R(1 - \frac{\sqrt{3}}{2})$. Остается по формуле найти объем сектора: $V = \frac{2}{3}\pi R^2 H = \frac{1}{3}\pi R^3(2 - \sqrt{3})$. (*Ответ*: $V = \frac{1}{3}\pi R^3(2 - \sqrt{3})$.)

**V. Подведение итогов**

– Какая часть шара называется шаровым сегментом, сектором?

---

**Домашнее задание**

П. 72, № 715, 717, 720.

***Дополнительная задача***

Диаметр шара, равный 30 см, служит осью цилиндра, у которого радиус основания равен 12 см. *Найдите* объем части шара, заключенный внутри цилиндра. (*Ответ*: $3528\pi$ см$^3$.)

## Урок 50. Объем шарового сегмента, шарового слоя и шарового сектора

*Цели урока*:

– систематизировать знания умения и навыки по данной теме;
– совершенствовать навыки решения задач на применение формул для вычисления объемов частей шара.

## Ход урока

### I. Организационный момент

### II. Актуализация знаний учащихся

1. Теоретический опрос. Фронтальная работа с классом.

   (В этот момент два ученика кратко записывают решение домашнего задания № 720, 715).

   – Дать определение шарового сегмента.
   – Записать формулу объема шарового сегмента.
   – Дать определение шарового слоя. Записать формулу нахождения объема шарового слоя.
   – Дать определение шарового сегмента. Записать формулу объема шарового сегмента.

После обсуждения вопросов заслушать ответы учеников, работавших у доски.

***Задача № 720*** (рис. 1).

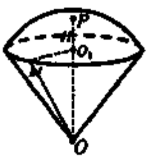


*Рис. 1*

*Решение*: Пусть $R$ – радиус шара, $r$ – радиус основания сегмента. Вычислим высоту сегмента $H = PO_1$, $OP = R$. Из прямоугольного $\Delta OO_1M$: $O_1 = \sqrt{OM^2 - O_1M^2} = \sqrt{R^2 - r^2} =$

$= \sqrt{75^2 - 60^2} = 45$ см. $H = PO_1 = OP - O_1O = 75 - 45 = 30$ см.

$$V = \frac{2}{3}\pi R^2 H = \frac{2}{3}\pi \cdot 75^2 \cdot 30 = \pi \cdot 20 \cdot 5625 = 112\,500\pi \text{ см}^3.$$

***Задача № 715*** (рис. 2).

Пусть $AC = h$, $AB = r$, $r$ – радиус клумбы, примем радиус шара равным $RMX$. Рассмотрим центральное сечение шара. $CD = 2R$, $\angle CBD = 90°$, так как он опирается на диаметр $CD$. Из $\Delta CDB$: $CB = 2R\cos\alpha$, из $\Delta ACB$:

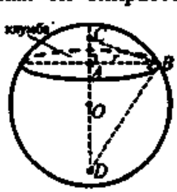


*Рис. 2*

$\cos\alpha = \dfrac{AC}{CB} = \dfrac{h}{\sqrt{h^2 + r^2}}$. Получим уравнение:

$$2R\frac{h}{\sqrt{h^2 + r^2}} = \sqrt{h^2 + r^2}, \qquad 2Rh = h^2 + r^2, \qquad R = \frac{h^2 + r^2}{2h}$$

$(h = 0{,}6$ м). $R = \dfrac{0{,}36 + 25}{2 \cdot 0{,}6} = \dfrac{25{,}36}{1{,}2} = \dfrac{317}{15}$ м. $V_{сегм.} = \pi h^2(R -$

$-\dfrac{1}{3}h) = (0{,}6)^2\pi(\dfrac{317}{15} - \dfrac{1}{5}) = \dfrac{9}{25}\pi \cdot \dfrac{317}{15} = \dfrac{3 \cdot 314\pi}{3 \cdot 25} = \dfrac{942}{125}\pi$. (*Ответ*: $\dfrac{942}{125}\pi$ м$^3$.)

### III. Решение задач на формирование умений и навыков учащихся

1. Плоскость, перпендикулярная диаметру шара, делит его на части 3 см и 9 см. На какие части делится объем шара?

*Решение*: $R = (3 + 9) : 2 = 6$ см. Высота меньшего сегмента $h$ равна 3 см.

Его $V_1 = \pi h^2(R - \frac{h}{3}) = 45\pi$ см$^3$. $V_{шара} = 288\pi$ см$^3$. Значит, $V_{б.сегм.} = 243\pi$ см$^3$.

2. Найти отношение сегментов из предыдущей задачи.

(*Ответ*: $V_1 : V_2 = \frac{45\pi}{243\pi} = \frac{5}{27}$).

3. Какую часть шара составляет объем шарового сегмента, у которого высота равна 0,1 диаметра шара?

*Решение*: Десятая часть диаметра есть пятая часть радиуса. Значит, высота сегмента $H = \frac{R}{5}$, $V_{сегм.} = \pi\frac{R^2}{25}\left(R - \frac{R}{15}\right) = \frac{14\pi R^3}{375}$. $\frac{V_{сегм.}}{V} = \frac{14}{375} : \frac{4}{3} = \frac{7}{250} =$ $= 2{,}8\%$. (*Ответ*: 2,8%.)

**IV. Самостоятельная работа** (см. приложение)

*Ответы:*

I уровень: 1) $\frac{5}{27}$; 2) $V = 4\pi\sqrt{3}$.

II уровень: 1) 6 см; 2) $V = \frac{1}{6}\pi$.

III уровень: 1) объем шара больше; 2) $3528\pi$ см$^3$.

**V. Подведение итогов**

– Покажите на чертеже шаровой слой и шаровой сегмент.

Собрать тетради учащихся для проверки самостоятельной работы.

---

**Домашнее задание**

№ 917, 756.

***Дополнительная задача***

Диаметр основания конуса равен 6 м, образующая наклонена к плоскости основания под углом 60° (рис. 3).

*Найти:* объем шара описанной около конуса сферы.

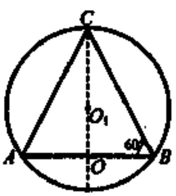


*Рис. 3*

*Решение*:

1) Центр $O_1 \in OC$, $\angle OBC = 60° \Rightarrow \Delta ABC$ – равносторонний.

2) $R = O_1C = \frac{AB\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$.

3) $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (2\sqrt{3})^3 = \frac{4 \cdot 8 \cdot 3\sqrt{3}\pi}{3} = 32\sqrt{3}\,\pi$ (м$^3$).

(*Ответ*: $V = 32\sqrt{3}\,\pi$ м$^3$.)

## Урок 51. Площадь сферы

*Цели урока:*

– вывести формулу для вычисления площади поверхности шара;

– научить учащихся применять эту формулу при решении задач.

## Ход урока

### I. Организационный момент

Сообщить тему и цели урока.

### II. Анализ ошибок самостоятельной работы

Подводятся итоги самостоятельной работы предыдущего урока и отмечаются типичные ошибки. Образцы решения задач, с которыми не справились учащиеся, проецируются на экран при помощи кодоскопа.

### III. Актуализация знаний учащихся

– Проверка домашнего задания.

Разобрать решение задачи № 719 при помощи кодоскопа.

***Задача № 719.*** В шаре проведена плоскость, перпендикулярная к диаметру и делящая его на части 6 см и 12 см. Найдите объемы двух полученных частей шара.


*Рис. 1*

*Дано*: шар, *ДС* – диаметр секущей плоскости, $AM = 6$ см, $MB = 12$ см (рис 1).

$V_1$ – объем меньшего шарового сегмента, $V_2$ – объем большего шарового сегмента.

*Найти*: $V_1$, $V_2$.

*Решение*: $СД \perp AB$, $AM = 6$ см, $MB = 12$ см. На рисунке: *ДС* – диаметр круга, который является плоскостью, перпендикулярной к диаметру шара, делящей шар на два шаровых сегмента. Диаметр шара $AB = AM + MB = 6 + 12 = 18$ (см), $R = 9$ см. Объем шарового сегмента вычисляется по формуле: $V = \pi h^2(R - \frac{1}{3}h)$, где $h = AM$ – высота меньшего сегмента.

$$V_1 = \pi \cdot AM^2 \cdot (R - \frac{1}{3}AM) = \pi \cdot 6^2 (9 - \frac{1}{3} \cdot 6) = 36\pi(9 - 2) = 36 \cdot 7 =$$

$= 252\pi$ (см$^3$). Объем шара равен: $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 9^3 = 4\pi \cdot 81 \cdot 3 =$ $= 972\pi$ (см$^3$); $V_2 = V - V_1 = 972\pi - 252\pi = 720\pi$ (см$^3$). (*Ответ*: $252\pi$ см$^3$ и $720\pi$ см$^3$.)

### IV. Изучение нового материала

Выведем формулу площади сферы $S = 4\pi R^2$, которой пользовались без доказательства, используя формулу объема шара.

Рассмотрим сферу радиуса $R$ с центром в точке $O$ и описанный около нее многогранник, имеющий $n$ граней. Пронумеруем грани в произвольном порядке и обозначим через $S$ площадь $i$-й грани ($i = 1, 2, ..., n$).

Соединим центр $O$ сферы отрезками со всеми вершинами многогранника и получим $n$ пирамид с общей вершиной $O$, основаниями которых являются грани многогранника, а высотами – радиусы сферы, проведенные в точки касания граней многогранника со сферой. Следовательно, объем $i$-й пирамиды равен $V_1 = \frac{1}{3}S_i \cdot R$, а объем $V_n$ всего описанного многогранника равен: $V_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{3} S_i \cdot R = \frac{1}{3} R \sum_{i=1}^{n} S_i = \frac{1}{3} R \cdot P_n$, где $P_n = \sum_{i=n}^{n} S_i$ – площадь поверхности многогранника, $3V_n = R \cdot P_n$. Отсюда получаем $P_n = \frac{3V_n}{R}$ (*).

Будем неограниченно увеличивать $n \to \infty$ так, чтобы наибольший размер каждой грани описанного многогранника стремился к нулю. При этом объем $V_n$ описанного многогранника будет стремиться к объему шара, т. е. $V_n \to V_{\text{шара}}$.

В самом деле, если наибольший размер каждой грани описанного многогранника не превосходит $S$, то описанный многогранник содержится в шаре радиуса $R + \delta$ с центром в точке $O$.

С другой стороны, описанный многогранник содержит исходный шар радиуса $R$. Поэтому $\frac{4}{3}\pi R^3 < V_n < \frac{4}{3}\pi(R+\delta)^3$. Так как $\frac{4}{3}\pi(R+\delta)^3 \to \frac{4}{3}\pi R^3$ при $\delta \to 0$, то и $V_n \to \frac{4}{3}\pi R^3$ при $\delta \to 0$ ($n \to \infty$). Переходя к пределу в равенстве (*), получим $\lim P_n = \lim_{n\to\infty} P_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3V_n}{R} = \frac{3}{R} \lim_{n\to\infty} V_n = \frac{3 \cdot 4}{R \cdot 3}\pi R^3 = 4\pi R^2$.

По определению площади сферы $\lim_{n\to\infty} P_n$, следовательно, $S_{\text{сф.}} = 4\pi R^2$ или $S_{\text{сф.}} = \pi(2R)^2 = \pi D^2$.

**V. Закрепление изученного материала**

1. Вопросы № 12, 13, 14 к главе VII.

***№ 12.*** Как изменится площадь сферы, если ее радиус: а) уменьшить в 2 раза? (*Ответ:* уменьшится в 4 раза.); б) увеличить в 3 раза? (*Ответ:* увеличится в 9 раз.)

***№ 13.*** Отношение объемов двух шаров равно 8. Как относятся площади их поверхностей?

***Решение:*** $V_1 : V_2 = 8$, $\frac{4}{3}\pi R_1^3 : \frac{4}{3}\pi R_2^3 = 2^3$, $R_1 : R_2 = 2$, $S_1 : S_2 = 4\pi R_1^2 : 4\pi R_2^2 = R_1^2 : R_2^2 = 2^2 = 4$. (*Ответ:* $S_1 : S_2 = 4$.)

***№ 14.*** В каком отношении находятся объемы двух шаров, если площади их поверхностей относятся как $m^2 : n^2$?

***Решение:***

1) $S_1 : S_2 = m^2 : n^2$, $4\pi R_1^2 : 4\pi R_2^2 = m^2 : n^2$, $R_1^2 : R_2^2 = m^2 : n^2$, $R_1 : R_2 = m : n$.

2) $V_1 : V_2 = \frac{4}{3}\pi R_1^3 : \frac{4}{3}\pi R_2^3 = R_1^3 : R_2^3 = m^3 : n^3$.

(*Ответ:* $V_1 : V_2 = m^3 : n^3$.)

2. Решить задачу № 722.

***Задача № 722.*** Вода покрывает приблизительно $\frac{3}{4}$ земной поверхности. Сколько квадратных километров земной поверхности занимает суша? ($R_{земли} = 6375$ км).

*Решение:*

$S_{шара} = 4\pi R^2$, $\frac{1}{4} S_{шара} = \pi R^2 = \frac{1}{4}\pi 6375^2 \approx 1{,}28 \cdot 10^3 = 128\pi 10$ (км$^2$). (*Ответ:* $128 \cdot 10$ км$^2$.)

3. Самостоятельно решить задачу.

***Задача 1.*** Гипотенуза и катеты прямоугольного треугольника являются диаметрами трех шаров. Какая существует зависимость между их поверхностями?

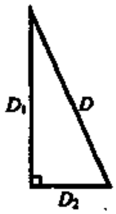



*Рис. 2*

*Решение:* (проецируем кодоскопом на экран рис. 2):

По теореме Пифагора имеем: $D^2 = D_1^2 + D_2^2$. Умножим обе части равенства на $\pi$, получаем: $\pi D^2 = \pi D_1^2 + \pi D_2^2$, отсюда $S = S_1 + S_2$.

(*Ответ:* площадь поверхности шара, построенного на гипотенузе, равна сумме площадей поверхностей шаров, построенных на катетах.)

4. Самостоятельно решить задачу (один из учащихся оформляет решение на прозрачном шаблоне для кодоскопа).

***Задача 2.*** Полная поверхность конуса, осевое сечение которого является равносторонним треугольником, равна поверхности шара, построенного на его высоте как на диаметре. Докажите.

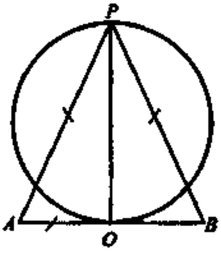



*Рис. 3*

*Дано:* $\Delta APB$ – осевое сечение конуса, $AB = PB = AP$, $PO$ – высота конуса, диаметр шара – $D$. $S_{кон.}$ – площадь полной поверхности конуса, $S_{сф.}$ – площадь поверхности шара (рис. 3).

*Доказать:* $S_{кон.} = S_{сф.}$

*Доказательство:*

1) В $\Delta APB$: $PO \perp AB$, $r = OB = \frac{1}{2}AB$ – радиус конуса.

2) В $\Delta BOP$: $\angle POB = 90°$, $\angle OPB = \frac{1}{2}\angle APB = 60° : 2 = 30°$; $r = D \cdot \mathrm{tg}30° = D\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{D}{\sqrt{3}}$.

$PB = AB = 2OB = 2r = 2\frac{D}{\sqrt{3}} = \ell$ – образующая конуса.

3) $S_{кон.} = \pi r(\ell + r) = \pi \cdot \frac{D}{\sqrt{3}}\left(2\frac{D}{\sqrt{3}} + \frac{D}{\sqrt{3}}\right) = \pi \cdot \frac{D}{\sqrt{3}} \cdot 3\frac{D}{\sqrt{3}} = 3\pi\frac{D^2}{3} = \pi D^2$.

4) $S_{сф.} = \pi D^2$.

5) Доказали, что $S_{кон.} = S_{сф.}$.

5. Обсудить решение задачи 2.

Задать дополнительные вопросы на знание формул ученику, решившему задачу 2.

Оценить его работу.

**V. Подведение итогов**

Обобщить полученные знания по теме «Площадь сферы» с целью проверки усвоения учащимися изученного материала. Повторить формулы: объема шара $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, объема шарового сегмента $V = \pi h^2(R - \frac{1}{3}h)$, объема шарового сектора $V = \frac{2}{3}\pi R^2 h$, объема шарового слоя $V = V_{шара} - (V_1 + V_2)_{сегмента}$, площади сферы $S_{сферы} = 4\pi R^2$ или $S_{сферы} = \pi D^2$, где $R$ – радиус шара, сферы; $h$ – высота сегмента, D – диаметр шара, сферы.

Оценить работу учащихся на уроке и выставить оценки наиболее активным.

---

**Домашнее задание**

П. 73 (знать формулы $S_{сферы} = 4\pi R^2$ и $S_{сферы} = \pi D^2$).

Решить задачи № 723, 724, 755.

Повторить формулы объемов шара, шарового сегмента, шарового слоя, шарового сектора (п. 71–72).

## Урок 52. Решение задач по темам «Объем шара и его частей», «Площадь сферы». Подготовка к контрольной работе

*Цели урока:*

- систематизировать теоретические знания по темам «Объем шара и его частей» и «Площадь сферы»;
- совершенствовать умения и навыки решения задач;
- обобщить изученный материал;
- подготовить учащихся к контрольной работе.

### Ход урока

**I. Организационный момент**

Сообщить тему и цели урока.

**II. Актуализация знаний учащихся**

1. Теоретический диктант (с последующей взаимопроверкой).

Вписать в текст недостающие по смыслу слова.

*Вариант I*

1) Всякое сечение шара плоскостью есть круг. Центр этого круга есть ... перпендикуляра, опущенного из центра шара на секущую плоскость.
2) Центр шара является его ... симметрии.
3) Осевое сечение шара есть ....
4) Линия пересечения двух сфер есть ....
5) Плоскости, равноудаленные от центра, пересекают шар по ... кругам.
6) Около любой правильной пирамиды можно описать сферу, причем ее центр лежит на ... пирамиды.

*Вариант II*

1) Любая диаметральная плоскость шара является его ... симметрии.
2) Осевое сечение сферы есть ... .
3) Центр шара, описанного около правильной пирамиды, лежит на ...пирамиды.
4) Радиус сферы, проведенной в точку касания сферы и плоскости ... к касательной плоскости.
5) Касательная плоскость имеет с шаром только одну общую точку – точку ....
6) В любую правильную пирамиду можно вписать сферу, причем ее центр лежит на ... пирамиды.

*Ответы (на экране):*

| *Вариант I* | *Вариант II* |
|---|---|
| 1) основание, | 1) плоскостью, |
| 2) центром, | 2) окружность, |
| 3) круг, | 3) высоте, |
| 4) окружность, | 4) перпендикулярен, |
| 5) равным, | 5) касания, |
| 6) высоте. | 6) высоте. |

2. Индивидуальная работа по карточкам. (3 ученика записывают решения на прозрачных слайдах, на которых предварительно записаны условия задач.)

**Карточка № 1**

Плоскость, перпендикулярная диаметру шара, делит его на части 3 см и 9 см. Найдите объем шара.

**Карточка № 2**

Два равных шара расположены так, что центр одного лежит на поверхности другого. Как относится объем общей части шаров к объему целого шара?

**Карточка № 3**

Какую часть объема шара составляет объем шарового сегмента, у которого высота равна 0,1 диаметра шара, равного 20 см?

(*Ответы*: 1) $288\pi$ см$^3$; 2) $\frac{5}{16}$; 3) 0,028.)

3. Одновременная проверка № 723 домашней работы с остальными учащимися класса (на экране).

*Задача № 723.* Сколько кожи пойдет на покрышку футбольного мяча радиуса 10 см? (На швы добавить 8% от площади поверхности мяча.)

*Решение:* $S_{сферы} = 4\pi R^2$; $S = 4\pi \cdot 10^2 = 400\pi$ (см$^2$).

*1 способ.*

1% $S$ составляет $0{,}01 \cdot 400\pi = 4\pi$ (см$^2$).

8% $S$ составляет $8 \cdot 4\pi = 32\pi$ (см$^2$). $S = 400\pi + 32\pi = 432\pi \approx 1357$ (см$^2$).

*2 способ.*

8% S составляет $1{,}08 \cdot 400\pi = 432\pi$ (см$^2$).

(*Ответ*: $432\pi$ см$^2$).

4. Демонстрация решения задач по карточкам с последующим обсуждением. Выставление оценок.

*Дополнительные вопросы:*

Записать уравнение сферы радиуса $R$ с центром $C$ ($x_0$; $y_0$; $z_0$) в прямоугольной системе координат. ($(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$).

Что называется касательной плоскостью к сфере? (Плоскость, имеющая со сферой только одну общую точку.)

Как расположены касательная плоскость и радиус сферы, проведенный в точку касания сферы и плоскости? (Они перпендикулярны.)

5. Решение задач

*Задача № 1.*

Объем шара радиуса $R$ равен $V$.

*Найдите:* объем шара радиуса: а) $2R$; б) $0{,}5R$.

(*Ответ:* а) $\frac{32}{3}\pi R^3$; б) $\frac{1}{6}\pi R^3$.)

*Задача № 2.*

*Чему* равен объем шарового сектора, если радиус окружности основания равен 60 см, а радиус шара – 75 см.

(*Ответ:* $112{,}5\pi$ см$^3$ или $450\pi$ см$^3$.)

6. Тестовая самостоятельная работа с последующей проверкой ответов (на экране) (см. приложение).

*Ответы к самостоятельной работе.*

*I уровень*

Вариант I: 1) $4500\pi$ см$^3$, $900\pi$ см$^2$; 2) $(x - 4)^2 + (y + 2)^2 + (z + 1)^2 = 9$; $36\pi$.

Вариант II: 1) $144\pi$ см$^2$, $288\pi$ см$^3$; 2) $(x + 2)^2 + (y + 5)^2 + (z - 3)^2 = 9$; $36\pi$.

*II уровень*

Вариант I: 1) $288\pi$ см$^3$, $144\pi$ см$^2$; 2) $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 + (z - 2)^2 = 9$; $36\pi$.

Вариант II: 1) $288\pi$ см$^3$, $144\pi$ см$^2$; 2) $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 2)^2 = 9$; $36\pi$.

*III уровень*

Вариант I: 1) $144\pi$ см$^2$, $288\pi$ см$^3$; 2) $x^2 + (y + 1)^2 + (z + 1)^2 = 12$; $48\pi$.

Вариант II: 1) $144\pi$ см$^2$, $288\pi$ см$^3$; 2) $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 4)^2 = 9$; $36\pi$.

**Домашнее задание**

*Подготовиться к контрольной работе.*

1. Повторить п. 58–61, формулы п. 64–73.
2. Решить задачи.

***№ 1.*** Объем шара равен $36\pi$ см$^3$. *Найти* его радиус.

***№ 2.*** Объемы двух шаров относятся как 8 : 1. *Найдите* отношение их радиусов.

***№ 3.*** В шар вписан куб со стороной $a$. *Найдите* объем шара.

***№ 4.*** Площадь диагонального сечения куба, вписанного в шар, равна $S$. *Найдите* объем шара.

***№ 5.*** Диаметр шара радиуса 15 см разделен на 3 части, длины которых относятся как 2 : 3 : 5. Через точки деления проведены плоскости, перпендикулярные диаметру. *Найдите* объем образовавшегося шарового слоя.

***№ 6.*** Нужно отлить свинцовый шар диаметром 3 см. Имеются свинцовые шарики диаметром 5 мм. *Сколько* таких шариков надо взять?

3. Просмотреть решения задач предыдущих уроков.

## Урок 53. Контрольная работа по темам «Объем шара» и «Площадь сферы»

*Цель урока:*

– проверить знания, умения и навыки учащихся при решении задач с применением формул нахождения объема шара, его частей и площади сферы.

**I. Контрольная работа по темам «Объем шара» и «Площадь сферы»** (см. приложение)

*Ответы:*

*I уровень:* Вариант I: 1) 2 : 3; 2) $100\pi$ см$^3$. Вариант II: 1) 2 : 3; 2) 2 : 3.

*II уровень:* Вариант I: 1) $10\sqrt[3]{\frac{3}{4}\pi}$ см, 2) $\frac{1}{3}\pi R^3(2-\sqrt{2})$, 3) $\approx 2148$ см$^3$. Вариант II: 1) 1000, 2) $\frac{1}{3}\pi R^3(2-\sqrt{3})$, 3) $562{,}5\pi$ см$^3$.

*III уровень:* Вариант I: 1) 50 см$^3$, 2) $\frac{\sqrt{6}\pi}{6}$, 3) $4\sqrt{2}\,\pi\frac{S^3}{3}$, 4) $\frac{719\pi}{3}$. Вариант II: 1) 120 см$^3$, 2) $\frac{6\sqrt{\pi}}{7\sqrt{7}}$, 3) $\sqrt[3]{\frac{3\pi^2}{V^2\sqrt{2}}}$ кв.ед., 4) $414\pi$ см$^3$.

## Урок 54. Зачет по темам «Объем шара, его частей» и «Площадь сферы»

*Цели урока:*

– систематизировать теоретические знания по темам «Объем шара, его частей» и «Площадь сферы»;

– совершенствовать умения и навыки решения задач по темам «Объем шара, его частей» и «Площадь сферы»;
– обобщить изученный материал.

## Ход урока

**I. Организационный момент**

– Раздать карточки учащимся по уровню сложности.

**II. Самостоятельное решение задач** (см. приложение)

*Коллективное решение задачи*

*Задача.* Полная поверхность конуса, осевое сечение которого является равносторонним треугольником, равна поверхности шара, построенного на его высоте как на диаметре. Докажите.

*Дано:* $\Delta APB$ – осевое сечение конуса, $AB = PB = AB$, $PO$ – высота конуса, диаметр шара – $D$.

$S_{кон}$ – площадь полной поверхности конуса

$S_{сферы}$ – площадь поверхности шара.

*Доказать:* $S_{кон} = S_{сф}$.

*Доказательство:*

1) В $\Delta APB$: $PO \perp AB$, $r = OB = \frac{1}{2}AB$ – радиус конуса.

2) В $\Delta BOP$: $\angle POB = 90°$, $\angle OPB = \frac{1}{2}\angle APB = 60° : 2 = 30°$, $r = D \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{D}{\sqrt{3}}$.

$PB = A, B = 2OB = 2r = 2\frac{D}{\sqrt{3}} = l$ – образующая конуса.

3) $S_{кон} = \pi r(l + r) = \pi \cdot \frac{D}{\sqrt{3}}(2\frac{D}{\sqrt{3}} + \frac{D}{\sqrt{3}}) = \pi \cdot \frac{D}{\sqrt{3}} \cdot 3\frac{D}{\sqrt{3}} = 3\pi\frac{D^2}{\sqrt{3}} = \pi D^2$.

4) $S_{сф} = \pi D^2$.

5) Доказали, что $S_{кон} = S_{сф}$.

**III. Подведение итогов**

Обобщить полученные знания по теме «Площадь сферы» с целью проверки усвоения учащимися изученного материала.

Повторить формулы:

объем шара $V = \frac{4}{3}\pi R^3$,

объем шарового сектора $V = \pi h^2(R - \frac{1}{3}h)$,

объем шарового слоя $V = \frac{2}{3}\pi R^2 h$,

площадь сферы $4\pi R^2$ или $S_{кон} = \pi D^2$, где, $R$ – радиус шара, сферы; $h$ – высота сегмента; $D$ – диаметр шара, сферы.

Оценить работу учащихся на уроке и выставить оценки наиболее активным.

---

**Домашнее задание**

П. 73 (знать формулы $S_{сф} = 4\pi R^2$ и $S_{сф} = \pi D^2$).

Решить задачи № 723, 724, 755.

Повторить формулы объемов шара, шарового сегмента, шарового слоя, шарового сектора (п. 71–72).

# ИТОГОВОЕ ПОВТОРЕНИЕ КУРСА ГЕОМЕТРИИ 10–11 классов

(уроки 55–68)

## Урок 55. Аксиомы стереометрии. Повторение

*Цель урока*:

– повторение аксиом и следствий из них, применение к решению задач.

### Ход урока

**I. Повторение теоретического материала**

*Вопросы*:

1) Сформулировать аксиомы стереометрии и выполнить на доске иллюстрации к каждой из них (рис. 1 *а), б), в)*).

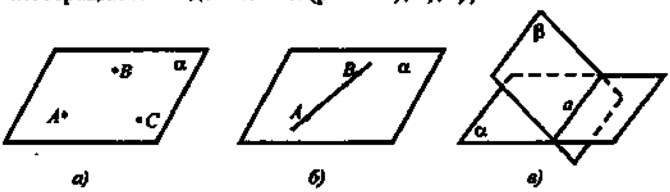



*Рис. 1*

2) Сформулировать следствия из аксиом и выполнить на доске иллюстрации к ним.

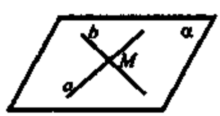



*Рис. 2*

***Теорема*: Через прямую и не лежащую на ней точку проходит плоскость, и притом только одна.**

***Теорема*: Через две пересекающиеся прямые проходит плоскость, и притом только одна (рис. 2).**

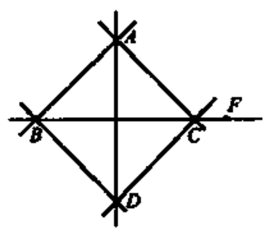



*Рис. 3*

3) Какие аксиомы используются при доказательстве I следствия? (*Ответ*: $A_1$; $A_2$)
4) Какие аксиомы используются при доказательстве II следствия? (*Ответ*: $A_2$.)

**II. Решение задач на готовых чертежах (рис. 3).**

*Дано*: точки *A, B, C* и D не лежат в одной плоскости.

*Указать*:

1) плоскости, которым принадлежит: а) прямая $AB$; б) точка $F$; в) точка $C$.
2) прямую пересечения плоскостей: а) $ABC$ и $ACD$; б) $ABD$ и $DCF$.

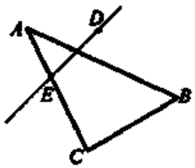


*Рис. 4*

*Дано*: точка $D$ лежит вне плоскости $ABC$. Пересекаются ли прямые $DE$ и $BC$? (рис. 4).

(*Ответ*: нет. Воспользоваться методом доказательства от противного.)

**III. Решение задач**

***№ 1. Даны*** две различные прямые, пересекающиеся в точке $A$. Докажите, что все прямые, пересекающие обе данные прямые и не проходящие через точку $A$, лежат в одной плоскости (рис. 5).

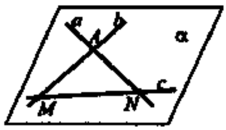


*Рис. 5*

*Решение*: Проведем через данные прямые $a$ и $b$ плоскость $\alpha$ (следствие из аксиом). Прямая $c$, пересекающая данные прямые имеет с плоскостью $\alpha$ две общие точки $M$ и $N$ (точки пересечения с данными прямыми). По аксиоме $A_2$ эта прямая должна лежать в плоскости $\alpha$

***№ 2.*** Докажите, что все прямые, пересекающие данную прямую и проходящие через данную точку вне прямой, лежат в одной плоскости (рис. 6).

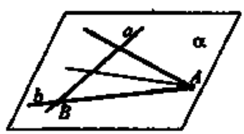


*Рис. 6*

*Решение*: Данная прямая $a$ и точка $A$ определяют плоскость $\alpha$ (следствие из аксиом). Если прямая $b$ проходит через точку $A$ и пересекает прямую $a$ в точке $B$, то прямая $b$ имеет с плоскостью $\alpha$ две различные общие точки ($A$ и $B$) и поэтому лежит в указанной плоскости $\alpha$ ($A_2$).

***№ 3.*** Даны четыре точки. Известно, что прямая, проходящая через любые две из этих точек, не пересекается с прямой, проходящей через другие две точки.

Докажите, что данные четыре точки не лежат в одной плоскости.

*Решение*: П, точки $A$, $B$, $C$ и $D$ лежат в одной плоскости. Тогда прямые $AB$ и $CD$, $AC$ и $BD$ были бы параллельными, так что точки $A$, $B$, $C$, $D$ являлись бы вершинами параллелограмма $ABCD$. Однако диагонали $AD$ и $BC$ этого параллелограмма должны пересекаться, что противоречит условию задачи.

**IV. Подведение итогов**

Заполните пропуски, чтобы получилось верное утверждение:

а) если $A \in a$, $a \in \alpha$, то $A \ldots \alpha$;

б) если $A \in \alpha$, $B \notin \alpha$, то $AB \ldots \alpha$;

в) если $A \in \alpha$, $B \in \alpha$, $C \in AB$, то $C \ldots \alpha$;

г) если $M \in \alpha$, $M \in \beta$, $\alpha \cap \beta = a$, то $M \ldots a$.

**Домашнее задание**

а) п. 1–3 учебника.

б) № 9; 15.

*I уровень*

*№ 9* (рис. 7).

*Решение*: $A, B, O \in \alpha$. Из того, что $A, O \in \alpha$, по $A_2$ следует, что $C \in \alpha$ (ибо $C \in AO$). Из того, что $B, O \in \alpha$, по $A_2$ следует, что $D \in \alpha$ (ибо $D \in BO$). Итак, $C$ и $D$ лежат в плоскости $\alpha$. (*Ответ*: да.)

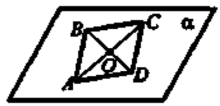


*Рис. 7*

*II уровень*

*№ 15* (рис. 8).

*Решение*: Каждая из трех точек принадлежит сразу двум прямым. Например, через $AB$ и $C \in AB$ по теореме п. 3 можно провести единственную плоскость $\alpha$. Это значит, что все три отрезка $AB$, $BC$ и $AC$ лежат в плоскости $\alpha$ (аксиома $A_2$), поэтому прямые, которым принадлежат эти отрезки, также $\in \alpha$.

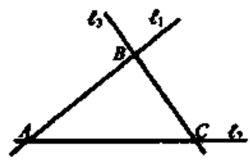


*Рис. 8*

Другой случай (рис. 9).

$l_1, l_2 \subset \alpha$, но $l_3 \not\subset \alpha$, хотя и пересекается с $l_2$ и $l_1$ в точке $M$.

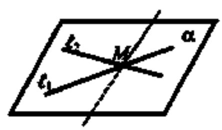


*Рис. 9*

## Урок 56. Повторение. Параллельность прямых, параллельность прямой и плоскости. Скрещивающиеся прямые. Параллельность плоскостей

*Цель урока*:
- повторение теоретического материала;
- обобщение навыка решения задач по данным темам.

### Ход урока

#### I. Проверка домашнего задания

#### II. Повторение теоретического материала

*Вопросы*:

1. Какие прямые в пространстве называются параллельными?
2. Какие прямые называются скрещивающимися?
3. Сформулируйте теорему о существовании и единственности прямой параллельной данной.
4. Сформулируйте признак параллельности прямых.
5. Что значит: прямая и плоскость параллельны?
6. Сформулируйте признак параллельности прямой и плоскости.
7. Какие плоскости называются параллельными?

8. Сформулируйте признак параллельности плоскостей.
9. Докажите, что если две параллельные плоскости пересекаются третьей, то прямые пересечения параллельны.
10. Докажите, что отрезки параллельных прямых, заключенные между двумя параллельными плоскостями, равны.

### III. Решение задач

***Задача № 103.*** На ребрах $DA$, $DB$ и $DC$ тетраэдра $DABC$ отмечены точки $M$, $N$, $P$ так, что $DM : MA = DN : NB = DP : PC$ (рис. 1).

*Докажите*, что плоскости $MNP$ и $ABC$ параллельны.

*Найдите* площадь $\Delta MNP$, если площадь $\Delta ABC$ равна $10\text{ см}^2$ и $DM : MA = 2 : 1$.

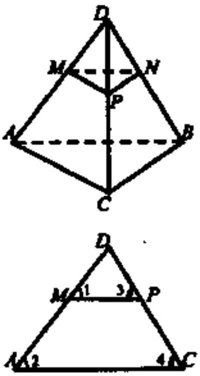



*Рис. 1*

*Решение*:

1. Рассмотрим $\Delta ADC$ и $\Delta MDP$. По условию $\dfrac{DM}{MA} = \dfrac{DP}{PC}$; $AD = MA + MD$; $DC = DP + PC$;

$\dfrac{DM}{AD - MD} = \dfrac{DP}{DC - DP}$ или $\dfrac{AD - MD}{DM} = \dfrac{DC - DP}{DP}$. $\dfrac{AD}{DM} - 1 = \dfrac{DC}{DP} - 1$, отсюда $\dfrac{AD}{DM} = \dfrac{DC}{DP}$. Учитывая, что у треугольника $ADC$ и треугольника $MDP$ угол $D$ – общий, а стороны, образующие угол $D$ пропорциональны, делаем вывод $\Delta ADC \sim \Delta MDP$. Из подобия следует равенство углов: $\angle 1 = \angle 2$; $\angle 3 = \angle 4$. Таким образом, $MP \parallel AC$ (по признаку параллельности прямых). Повторив рассуждение для грани $DCB$, получим $PN \parallel CB$. Следовательно, по теореме п. 10 $(MNP) \parallel (ABC)$.

2. $\Delta MNP \sim \Delta ABC$ (по двум углам). $\dfrac{DM}{MA} = \dfrac{2}{1}$; $\dfrac{DM}{AD - MD} = \dfrac{2}{1}$;

$\dfrac{AD - MD}{DM} = \dfrac{1}{2}$. $\dfrac{AD}{DM} - 1 = \dfrac{1}{2}$; $\dfrac{AD}{DM} = \dfrac{3}{2}$.

Из подобия $\Delta ADC$ и $\Delta MDP$ следует, что $\dfrac{AD}{DM} = \dfrac{AC}{MP}$; $\dfrac{AC}{MP} = \dfrac{3}{2}$.

$\dfrac{S_{ABC}}{S_{MNP}} = \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 = \dfrac{9}{4}$. $S_{MNP} = \dfrac{10 \cdot 4}{9} = 4\dfrac{4}{9}$ (см$^2$).

(*Ответ*: $4\dfrac{4}{9}$ см$^2$.)

*Задача № 104* (рис. 2). Изобразите тетраэдр *ABCD* и отметьте точку *M* на ребре *AB*. Постройте сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через точку *M* параллельно прямым *AC* и *BD*.

*Решение:* Проведем $ME \parallel AC$, $MF \parallel BD$. Плоскость сечения пересечет плоскость *BCD* по прямой параллельной *MF* ($MF \parallel (BCD)$ по построению), по этому проводим $EK \parallel BD$. Соединим точки *K* и *F*. *MEKF* – искомое сечение. Докажем это.

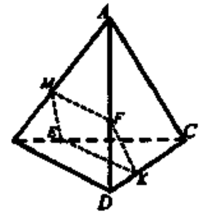


*Рис. 2*

$$\left.\begin{array}{l} AC \parallel ME \\ ME \subset (MEF) \end{array}\right\} AC \parallel (MEF).$$

$$\left.\begin{array}{l} MF \parallel BD \\ MF \subset (MEF) \end{array}\right\} BD \parallel (MEF).$$

Итак, $(MEKF) \parallel AC$, $(MEKF) \parallel BD$.

Так как через точку *M* можно провести только одну прямую $ME \parallel AC$ в грани *ABC* и одну прямую $MF \parallel BD$ в грани *BAD*, то плоскость *MEKF* – единственная.

**IV. Математический диктант**

Диктант по темам: «Аксиомы стереометрии» и «Параллельность прямых и плоскостей» (см. приложение).

**Домашнее задание**

П. 14. № 105, 108.

*I уровень*

*Задача № 105* (рис. 3).

*Решение:* а) $MN \nparallel BC$. Продолжим отрезок *MN* до пересечения с продолжением стороны *BC* в точке *O*. В плоскости *ABC* соединим точки *O* и *K*, он пересечет ребро *AC* в точке *E*; продолжим отрезок *OK* до пересечения с ребром *AB* в точке *F*. Соединим точки *M* и *F*, лежащие в плоскости грани *ABD* и точки *N* и *E*, лежащие в плоскости грани *ADC*.

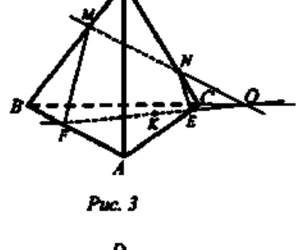


*Рис. 3*

Сечение *MNEF* – искомое.

б) $MN \parallel BC$ (рис. 4).

$MN \parallel BC$, $BC \subset$ плоскости *ABC*. По теореме I $MN \parallel$ плоскости *ABC*.

По теореме II плоскость сечения пересечет плоскость *ABC*, по прямой, проходящей через точку *K* параллельно *MN*.

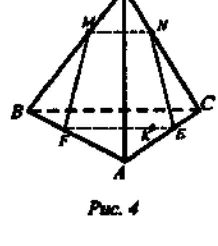


*Рис. 4*

Отсюда построение: в плоскости *ABC* через точку *K* проводим $FE \parallel BC$ до пересечения со сторонами основания в точках $F$ и $E$. Соединяя точки $M$ и $F$, точки $N$ и $E$, получаем искомое сечение $MNEF$.

***II уровень***

***Задача № 108*** (рис. 5).

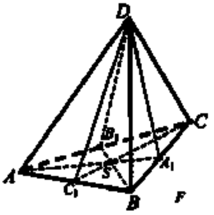



*Рис. 5*

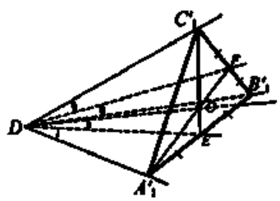



*Рис. 6*

*Решение*: Отложим от точки $D$ на ребрах $DA$, $DB$, $DC$ равные отрезки: $DA_1' = DB_1' = DC_1' = a$. Соединим точки $A_1'$, $B_1'$ и $C_1'$ отрезками (рис. 6). Нарисуем ограниченную этими отрезками часть тетраэдра, для удобства «положив» его на одну из плоскостей боковых граней.

Проведем биссектрисы двух углов при вершине $D$: $DE$ и $DF$, отрезки $C_1'E$ и $A_1'F$. В $\Delta A_1'OB_1' : DA_1' = DB_1'$, $DE$ – общая. $\angle A_1'DE = \angle EDB_1'$, поэтому $\Delta A_1'DE = \Delta B_1'DE$. Следовательно, $EA_1' = B_1'E$. В $\Delta C_1'DB_1' : DF$ – общая, $DC_1' = DB_1'$ $\angle C_1'DF = \angle B_1'DF$, поэтому $\Delta C_1'DF = \Delta B_1'DF$, следовательно, $C_1'F = FB_1'$. В $\Delta A_1'B_1'C_1'$ отрезки $C_1'E$ и $A_1'F$ являются медианами.

Аналогично для биссектрисы из вершины $B_1'$.

Таким образом, плоскости $DEC_1'$ и $DFA_1'$ и третья, не показанная на рисунке, пересекаются на рисунке по прямой $DO$.

Раз указанные плоскости пересекаются по прямой $DO$, то эта прямая пересечется с плоскостью основания в некоторой точке $S$, значит, все три отрезка $AA_1'$, $CC_1'$ и $BB_1'$ проходят через точку $S$.

## Урок № 57. Повторение. Перпендикулярность прямой и плоскости. Теорема о трех перпендикулярах. Угол между прямой и плоскостью

*Цели урока:*

– повторение теоретического материала;
– обобщение навыка решения задач по данной теме;
– проверка уровня сформированных навыков при решении задач.

### Ход урока

**I. Проверка домашнего задания № 105, 108**

**II. Повторение теоретического материала**

*Вопросы:*

1. Какие прямые в пространстве называются перпендикулярными?
2. Дайте определение перпендикулярности прямой и плоскости.
3. Сформулируйте признак перпендикулярности прямых в пространстве.
4. Сформулируйте признак перпендикулярности прямой и плоскости.
5. Что называется расстоянием от точки до плоскости?

6. Что такое наклонная, проведенная из данной точки к плоскости? Что такое проекция наклонной?
7. Сформулируйте прямую и обратную теоремы о трех перпендикулярах.
8. Сформулируйте признак перпендикулярности плоскостей.
9. Что называется углом между прямой и плоскостью?

**III. Решение задач**

***Задача № 158*** (рис. 1).

Через вершину $B$ ромба $ABCD$ проведена прямая $BM$, перпендикулярная к его плоскости.

*Найдите* расстояние от точки $M$ до прямых, содержащих стороны ромба, если $AB = 25$ см, $\angle BAD = 60°$, $BM = 12{,}5$ см.

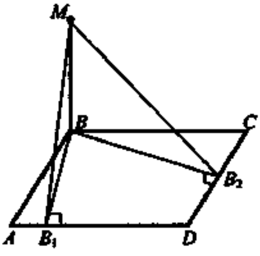


*Рис. 1*

*Решение*: $MB \perp (ABCD) \Rightarrow MB \perp AB$, $MB \perp BC$ $\Rightarrow MB = 12{,}5$ см. $BB_1 \perp AD$, $BB_2 \perp CD$. По теореме о трех перпендикулярах $MB_1 \perp AD$, $MB_2 \perp DC$. $\angle A = \angle C$, $AB = BC$, значит, $\Delta AB_1B = \Delta CB_2B$, $BB_1 = BB_2 = 25 \cdot \sin 60° = 12{,}5\sqrt{3}$ (см).

Проекции $BB_1$ и $BB_2$ наклонных $MB_1$ и $MB_2$ равны, значит, равны и наклонные $MB_1 = MB_2 = \sqrt{MB^2 + B_1B^2} = \sqrt{12{,}5^2 + (12{,}5\sqrt{3})^2} = 12{,}5 \cdot 2 = 25$ (см).

(*Ответ*: 12,5 см, 12,5 см, 25 см.)

***Задача № 165.*** Из точки А, удаленной от плоскости $\gamma$ на расстояние $d$, проведены к этой плоскости наклонные $AB$ и $AC$ под углом 30° к плоскости. Их проекции на плоскость $\gamma$ образуют угол в 120° (рис. 2).

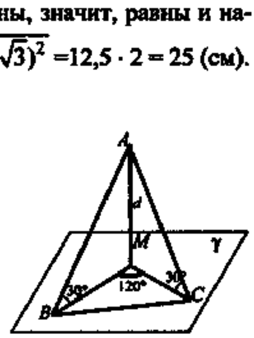


*Рис. 2*

*Найдите*: $BC$.

*Решение*: $\Delta AMC = \Delta AMB$ (по катету и острому углу). $BM = MC = d\mathrm{ctg}30° = \sqrt{3}\,d$. $\Delta BMC$: по теореме косинусов $BC^2 = BM^2 + MC^2 - 2BM \cdot MC \cdot \cos 120°$; $BC_2 = 3d^2 + 3d^2 - 2d^2 \cdot 3\cos(180°–60°) = 9d^2$; $BC = 3d$. (*Ответ*: $3d$.)

**IV. Самостоятельная работа** (см. приложение)

*Решение самостоятельной работы:*

***Вариант I***

***I уровень*** (рис. 3).

*Решение*:

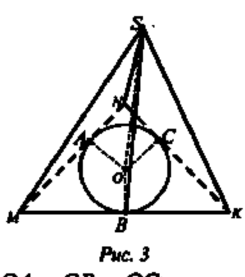


*Рис. 3*

1) Точки $A$, $B$, $C$ – точки касания сторон треугольника с окружностью. $O$ – центр окружности, $S$ – точка на перпендикуляре. $R = OA = OB = OC$;

2) По теореме о трех перпендикулярах $SA \perp MN$, $\Delta SOA$ – прямоугольный, $SA = SB = SC = \sqrt{R^2 + OS^2}$, т. е. все расстояния от точки $S$ до сторон треугольника равны.

***II уровень***

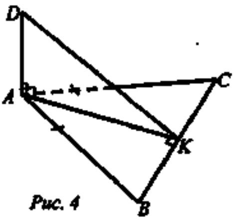



*Рис. 4*

*Решение* (рис. 4):

1) Проведем $AK \perp BC$, по теореме о трех перпендикулярах $DK \perp BC$, $D$ – искомое расстояние.
2) $BK = 3$ см, $\Delta ABK$:

$$AK = \sqrt{AB^2 - BK^2} = \sqrt{6^2 - 3^2} = \sqrt{27} \text{ (см)}.$$

3) $\Delta DAK$: $DK = \sqrt{AD^2 + AK^2} =$

$$= \sqrt{13^2 + 27^2} = \sqrt{196} = 14 \text{ (см)}.$$

(*Ответ*: 14 см.)

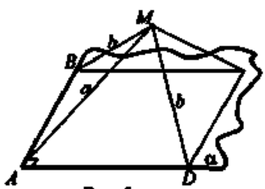



*Рис. 5*

***III уровень***

*Решение* (рис. 5): Пусть $\alpha$ – плоскость данного угла $BAD$, $MB = MD - b$, $MA = a$, $MC$ – перпендикуляр к плоскости угла. По теореме о трех перпендикулярах $BC \perp AB$, $DC \perp AD$, причем $BC = CD$ как проекции равных наклонных. Следовательно, $ABCD$ – квадрат. $DC = BC = AB = AD = \sqrt{a^2 - b^2}$. $\Delta DCM$: $MC = \sqrt{DM^2 - DC^2} = \sqrt{b^2 - (a^2 - b^2)} = \sqrt{2b^2 - a^2}$.

(*Ответ*: $\sqrt{2b^2 - a^2}$.)

## *Вариант II*

***I уровень***

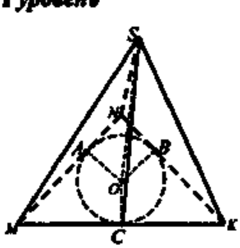



*Рис. 6*

*Решение* (рис. 6):

1) $SO = 1{,}1$ м; $SB$, $SC$, $SA$ – наклонные к сторонам треугольника. $AO = BO = CO$ – проекции.
2) По теореме о трех перпендикулярах $AO \perp MN$, $OB \perp NK$, $OC \perp MK$. Следовательно, $O$ – центр вписанной окружности. $OB = \sqrt{SB^2 - SO^2}$ из $\Delta SOB$. $OB =$

$$= \sqrt{6{,}1^2 - 1{,}1^2} = \sqrt{36} = 6 \text{ (см)}.$$

(*Ответ*: 6 см.)

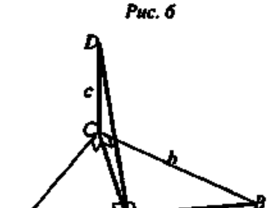



*Рис. 7*

***II уровень***

*Решение* (рис. 7):

1) Проведем $DC \perp$плоскcти $ABC$, $CK \perp AB$ (высота $\Delta ABC$) $DK$ – наклонная;
2) По теорме о трех перпендикулярах $DK \perp AB$, следовательно, $DK$ – искомое расстояние;

3) $S_{ABC}=\frac{1}{2}ah=\frac{1}{2}AC\cdot BC=\frac{1}{2}\sqrt{a^2-b^2}\cdot b$. $AC=\sqrt{a^2-b^2}$; $h=\frac{\sqrt{a^2-b^2}\cdot b}{a}$;

$CK=\sqrt{a^2-b^2}\cdot b$.

4) $\Delta CDK$: $DK=\sqrt{CD^2+CK^2}=\sqrt{c^2+\frac{a^2b^2-b^4}{a^2}}=\sqrt{c^2+b^2-\frac{b^4}{a^2}}$.

(*Ответ*: $\sqrt{c^2+b^2-\frac{b^4}{a^2}}$.)

***III уровень***

***Решение*** (рис. 8):

Пусть $SK$ – искомое расстояние. $K$, $M$, $N$ – точки касания сторон треугольника с окружностью $SK=SM=SN$. $r=OK$, $OK\perp BC$. По теореме о трех перпендикулярах $SK\perp BC$. $\Delta SOK$ – прямоугольный. $S_{ABC}=\frac{1}{2}BM\cdot AC=p\cdot r$, где $p$ – полупериметр.

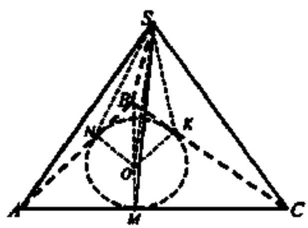


*Рис. 8*

$BM=\sqrt{BC^2-MC^2}=\sqrt{25-9}=\sqrt{16}=4$ (см); $p=\frac{5+6+5}{2}=8$ (см);

$S=p\cdot r$; $S=\frac{1}{2}6\cdot 4=12$ (см$^2$). $r=\frac{S}{p}$; $r=\frac{12}{8}=1{,}5$ (см). $OK=1{,}5$ см;

$SK=\sqrt{SO^2+OK^2}=\sqrt{4+2{,}25}=\sqrt{6{,}25}=2{,}5$ (см). (*Ответ*: 2,5 см.)

**V. Подведение итогов**

– Как найти угол между прямой и плоскостью?

---

**Домашнее задание**

П. 20 учебника, № 143; 149.

## Урок 58. Повторение. Двугранный угол. Перпендикулярность плоскостей

*Цели урока:*

- организовать повторение основных теоретических фактов по заданным темам;
- совершенствовать навыки решения задач.

## Ход урока

**I. Организационный момент**

Сообщить тему урока, сформулировать цели урока.

**II. Актуализация опорных знаний учащихся**

***Теоретический опрос.***

1. Определение перпендикулярности прямой и плоскости.
2. Признак перпендикулярности прямой и плоскости.
3. Двугранный угол.
4. Определение перпендикулярности плоскостей.
5. Признак перпендикулярности двух плоскостей.
6. Свойства прямоугольного параллелепипеда.

***Проверка домашнего задания.***

***Задача № 143.***

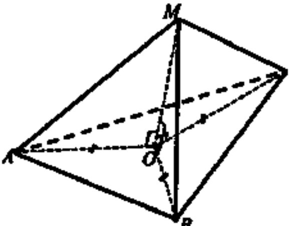


*Рис. 1*

Расстояние от точки $M$ до каждой из вершин правильного $\Delta ABC$ равно 4 см. Найдите расстояние от точки $M$ до плоскости $ABC$, если $AB = 6$ см.

*Дано*: $\Delta ABC$ – правильный, $M \in ABC$ $AB = 6$ см, $AM = BM = CM = 4$ см (рис. 1).

*Найти*: $\rho(M$, пл. $ABC)$.

*Решение*: Проводим $MO \perp$ пл. $ABC$, соединим точку $O$ с $A$, $B$, $C$. Равные наклонные имеют равные проекции, поэтому $AO = OB = OC = R$, где $R$ – радиус окружности, описанной около $\Delta ABC$. По теореме синусов $R = \dfrac{AB}{2\sin C}$, $R = \dfrac{6}{2\sin 60^\circ} = \dfrac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$ (см).

Из прямоугольного $\Delta AOM$: $\rho(M$, пл. $ABC) = MO = \sqrt{AM^2 - AO^2}$; $MO = \sqrt{16-12} = 2$ (см). (*Ответ*: 2 см.)

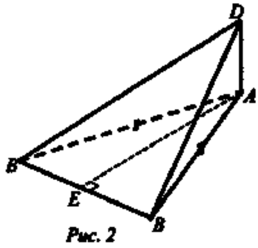


*Рис. 2*

***Задача № 149.*** Отрезок $AD$ перпендикулярен к плоскости равнобедренного $\Delta ABC$. Известно, что $AB = AC = 5$ см, $BC = 6$ см, $AD = 12$ см. Найдите расстояние от концов отрезка $AD$ до прямой $BC$.

*Дано*: $\Delta ABC$, $AB = AC = 5$ см, $BC = 6$ см, $AD \perp$ пл. $ABC$, $AD = 12$ см (рис. 2).

*Найти*: $S(D; BC)$; $S(A, BC)$.

*Решение*:

1) Проведем $AE \perp BC$, в равнобедренном $\Delta ABC$ $AE$ – высота и медиана, $BE = EC = 3$ см. По теореме Пифагора из $\Delta CEA$: $AE = \sqrt{AC^2 - EC^2}$, $AE = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$ (см).

2) Соединим точки $D$, $E$. $\left.\begin{array}{l} BC \perp AE \text{ – по построению} \\ BC \perp DA \text{ – по условию} \end{array}\right\}$ по теореме о трех перпендикулярах $BC \perp DE$.

3) $\Delta DEA$ – прямоугольный, по теореме Пифагора $DE = \sqrt{DA^2 + AE^2}$,

$DE = \sqrt{144+16} = 4\sqrt{10}$ (см).

(*Ответ*: 4 см, $4\sqrt{10}$ см.)

***Решение задач по готовым чертежам***

*1. Дано*: $KLMN$ – тетраэдр, все ребра его равны. Точка $O$ – середина ребра $MN$ (рис. 3).

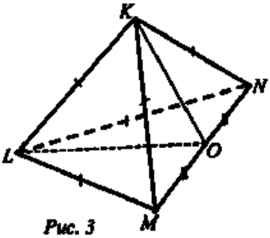


Рис. 3

*Доказать*: $\angle KOL$ – линейный угол двугранного угла $LNMK$.

*Доказательство*:

1) $\Delta KMN$ – равносторонний, $KO$ – медиана, следовательно, $KO \perp MN$.
2) $\Delta LMN$ – равносторонний, $LO$ – медиана, следовательно $LO \perp MN$.
3) По определению линейного угла, $\angle KOL$ – линейный угол двугранного угла $LNMK$.

2. *Дано*: $ABCD$ – ромб, $\angle A = 60°$, $AB = m$, $BE \perp ABC$, $BE = \dfrac{m\sqrt{3}}{2}$ (рис. 4).

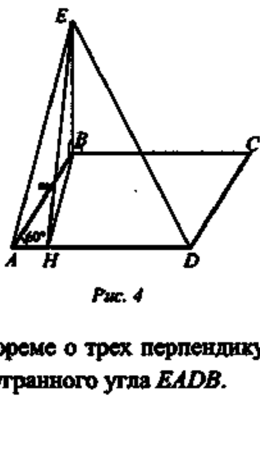


Рис. 4

*Найти*: угол между плоскостями $ADE$ и $ABC$.

*Решение*:

1) $BH$ – высота ромба $ABCD$, $EH \perp AD$ (по теореме о трех перпендикулярах). Значит, $\angle EHB$ – линейный угол двугранного угла $EADB$.

2) $\Delta BHA$: $BH = m \cdot \sin 60° = m\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

3) $\Delta EBH$: $\operatorname{tg}(EHB) = \dfrac{BE}{BH} = \dfrac{m\sqrt{3}}{2} : \dfrac{m\sqrt{3}}{2} = 1$; $\angle EHB = 45°$.

(*Ответ*: 45°.)

## III. Решение задач

*№ 1. Дано*: $ABCA_1B_1C_1$ – наклонная призма, $ABC$ – правильный треугольник, $\angle A_1AB = \angle A_1AC = \alpha$, $AB = a$, $AA_1 = 2a$ (рис. 5).

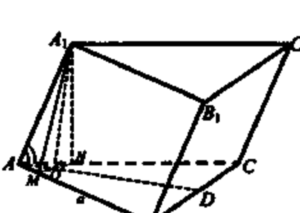


Рис. 5

а) *Докажите*: грань $BB_1C_1C$ – прямоугольник.

б) *Вычислите* площадь грани $AA_1B_1B$.

в) *Вычислите* площадь полной поверхности.

г) *Составить* план вычисления объема призмы.

***Решение***:

а) Построим из вершины $A_1$ перпендикуляр к плоскости $ABC$ – $A_1O$ и перпендикуляры к прямым $AB$ и $AC$ – $A_1M$ и $A_1N$ соответственно. Тогда $OM$ – проекция $A_1M$, $ON$ – проекция $A_1N$ на плоскость $ABC$. По теореме о трех перпендикулярах $OM \perp AB$, $ON \perp AC$. $\Delta A_1MA = \Delta A_1NA$ (по гипотенузе и острому углу). Значит, $ON = OM$, т. е. точка $O$ – равноудалена от сторон $AB$ и $AC$, и значит лежит на биссектрисе $AD$. Так как $\Delta ABC$ – равносторонний, то $AD \perp BC$, $AO$ – проекция $AA_1$, на плоскость $ABC$. По теореме о трех перпендикулярах $AA_1 \perp BC$, а значит, $BB_1 \perp BC$, $CC_1 \perp BC$, т. е. $BB_1C_1C$ – прямоугольник.

б) $AA_1B_1B$ – параллелограмм. $S_{AA_1B_1B} = a \cdot 2a \cdot \sin\alpha = 2a^2\sin\alpha$.

в) $S_{AA_1B_1B} = 2a^2 \sin\alpha$; $BB_1C_1C$ – прямоугольник, $S_{BCC_1B_1} = a \cdot 2a = 2a^2$,

$$S_{\text{осн}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}, \text{ значит, } S_{\text{полн.}} = S_{\text{б.п.}} + 2S_{\text{осн.}} = 2a^2 \cdot \sin\alpha + 2a^2 \cdot \sin\alpha + 2a^2 +$$

$$+ 2\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 2a^2\left(2\sin\alpha + 1 + \frac{\sqrt{3}}{4}\right);$$

г) Из $\Delta AMA_1$ найдем $AM$ и $A_1M$; из $\Delta AOM$ найдем $OM$; из $\Delta A_1OM$ найдем $A_1O$. Зная высоту $A_1O$ и $S_{\text{осн.}}$ найдем объем.

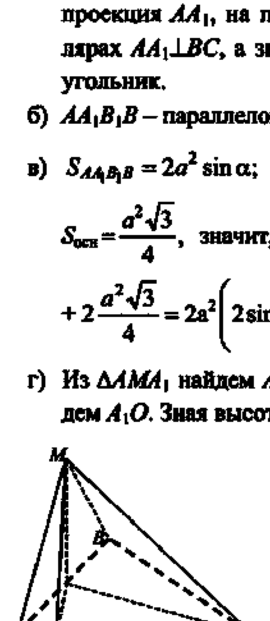


*Рис. 6*

**№ 2.** Основанием пирамиды $MABC$ является равносторонний $\Delta ABC$ со стороной $a$. Грань $MAB$ – равнобедренный треугольник, плоскость которого перпендикуляна плоскости основания пирамиды. $MA = MB = \frac{a\sqrt{7}}{4}$ (рис. 6).

***Найти:*** углы наклона боковых граней пирамиды к ее основанию.

***Решение:***

1) Высоты $\Delta AMB$ и $\Delta ABC$, проведенные из $M$ и $C$, являются медианами, поэтому пересекаются в точке $D$. $\angle MDC = 90°$ – линейный угол данного двугранного угла $MABC$.

2) Проведем $DK \perp AC$, то $AC \perp MK$ (по теореме о трех перпендикулярах). $\angle MKD$ – линейный угол двугранного угла $MABC$.

3) Из $\Delta MAD$: $MD = \sqrt{\frac{7a^2}{16} - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$; Из $\Delta AKD$: $KD = \frac{a}{2}\sin 60° = \frac{a\sqrt{3}}{4}$;

Из $\Delta MKD$: $\operatorname{tg}(MKD) = \frac{MD}{KD} = 1$, $\angle MKD = 45°$.

(*Ответ*: 90°, 45°, 45°.)

**№ 3.** Через образующую цилиндра проведены два сечения. Одно из них является осевым сечением цилиндра, его площадь равна 48 см$^2$. Угол между плоскостями сечений 60°. Вычислить площадь второго сечения (рис. 7).

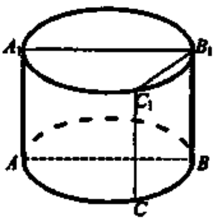



*Рис. 7*

*Решение*: $S_{AA_1B_1B} = AB \cdot BB_1 = 48$ (см$^2$). $\Delta ABC$ – прямоугольный, т.к. $AB$ – диаметр; $\angle ABC = 60°$ (по условию). Значит, $BC = AB \cdot \cos 60° = \frac{1}{2} AB$. $S_{CBB_1C_1} =$

$S_{CBB_1C_1} = = BC \cdot BB_1 = \frac{1}{2} AB \cdot BB_1 = \frac{1}{2} \cdot 48 = 24$ (см$^2$). (*Ответ*: 24 см$^2$.)

**IV. Подведение итогов**

– Назовите необходимые условия перпендикулярности двух плоскостей.

---

**Домашнее задание**

Повторить гл. II, № 212, 216.

## Урок 59. Многогранники: параллелепипед, призма, пирамида, площади их поверхностей

*Цели урока:*

– систематизировать теоретические знания по теме;
– совершенствовать навыки решения задач.

### Ход урока

**I. Организационный момент**

Сообщить тему урока, сформулировать цели урока.

**II. Актуализация знаний учащихся**

Повторение материала в ходе устного опроса.

1. Определение многогранника, его элементов.
2. Что такое геометрическое тело?
3. Секущая плоскость – это …
4. Определение призмы, прямой призмы, наклонной призмы, правильной призмы. Формулы площади полной поверхности призмы, боковой поверхности призмы.
5. Формула объема призмы.
6. Определение пирамиды, правильной пирамиды, усеченной пирамиды. Формулы площади полной поверхности, боковой поверхности пирамиды.
7. Объем пирамиды (формула).

***Проверка домашнего задания.***

***Задача № 212*** (рис. 1).

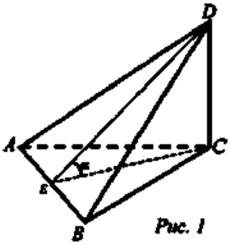


*Рис. 1*

1) $DC\perp$пл. $ABC$ по условию, $DC\perp AB$. Проводим $CE\perp AB$, по теореме о трех перпендикулярах $DE\perp AB$. $\angle DEC$ – линейный угол двугранного угла $CABD$, пусть $\angle DEC=\alpha$.

2) Пусть $CE=h$. $S_{ABC}=\dfrac{1}{2}AB\cdot CE=$

$=\dfrac{1}{2}AB\cdot h=S$; $S_{ADB}=\dfrac{1}{2}AB\cdot DE=$

$$=\frac{1}{2}AB\cdot h\cdot\frac{1}{\cos\alpha}=S\frac{1}{\cos\alpha}=\frac{S}{\cos\alpha}.$$

Утверждение доказано.

***Задача № 216*** (рис. 2)

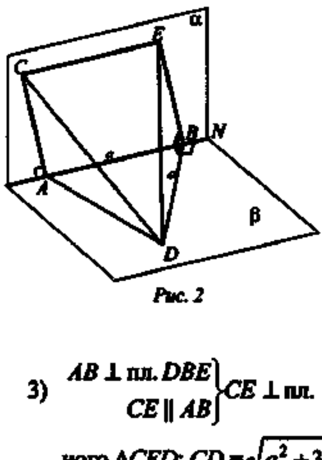


*Рис. 2*

*Решение*:

1) Построим линейный угол двугранного угла. Проведем $BE\perp MN$, соединим точки $E$ и $D$, проведем $CE\|AB$. $\left.\begin{matrix}DB\perp MN\\ BE\perp MN\end{matrix}\right\}\angle DBE$ – линейный угол двугранного угла $CMND$.

2) $ACEB$ – квадрат, $BE=a$. Из $\Delta BDE$ по теореме косинусов: $DE^2=a^2+a^2-$

$$-2a^2\cos120^\circ=2a^2+2a^2\cdot\frac{1}{2}=3a^2,\ DE=\sqrt{3}a.$$

3) $\left.\begin{matrix}AB\perp \text{пл. } DBE\\ CE\parallel AB\end{matrix}\right\}CE\perp$пл. $DBE$, $CE\perp DE$, $\angle CED=90^\circ$. Из прямоугольного $\Delta CED$: $CD=\sqrt{a^2+3a^2}=2a$.

(*Ответ*: $2a$.)

**III. Решение задач**

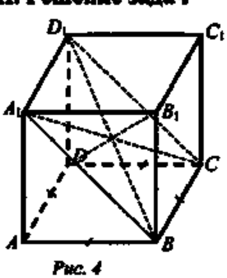


*Рис. 4*

***№ 294.*** Задачу решить самостоятельно, с последующей проверкой на доске (рис. 3).

*Решение*: Правильная четырехугольная призма – частный случай прямоугольного параллелепипеда (диагонали которого пересекаются в одной точке и делятся в ней пополам). В сечении $A_1D_1CB$ – прямоугольник, его площадь $S_Q$. $S_Q=a\cdot A_1B$, следовательно, $A_1B=\dfrac{S_Q}{a}$. Из прямоугольного $\Delta A_1AB$:

$A_1A = \sqrt{A_1B^2 - AB^2} = \sqrt{\dfrac{S_O^2}{a^2} - a^2} = \dfrac{\sqrt{S_O^2 - a^4}}{a}$. $S_{бок.} = 2 \cdot S_{AA_1B_1B} + 2S_{BB_1C_1C}$, $S_{бок.} = 2 \cdot$

$\cdot AA_1 \cdot AB + 2BB_1 \cdot BC = 4AA_1 \cdot a = \dfrac{4a\sqrt{S_O^2 - a^4}}{a} = 4\sqrt{S_O^2 - a^4}$. (*Ответ*: $4\sqrt{S_O^2 - a^4}$ .)

***№ 300*** (рис. 4)

***Решение***:

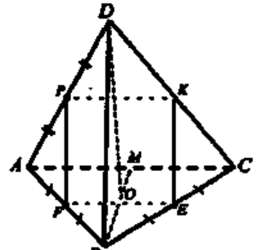


Рис. 4

1) Построим сечение плоскостью, проходящей через точки *E*, *F* и *P*. Проводим *EF* в пл. *ABC*. *EF* – средняя линия в $\Delta ABC$. $EF \| AC$, $EF = \dfrac{1}{2}AC = \dfrac{1}{2}$a.
2) $EF \| AC$, $AC \subset$ пл. *DCA*, значит $EF \|$пл. *DCA*. Плоскость сечения пересечет грань *DCA* по некоторой прямой *PK*. По теореме, если плоскость сечения проходит через прямую (*EF*), параллельную другой плоскости (*DCA*), и пересекает эту плоскость (*DCA*), то линия пересечения (*PK*) параллельна первой прямой (*EF*). Следовательно, $EF \| PK$. Проводим в грани *BDA* отрезок *FP*, а в грани *BDC* отрезок *EK*. Четырехугольник *EFPK* – искомое сечение. $EF \| AC$, $PK \| EF \| AC$, $EF = \dfrac{1}{2}AC$, $PK = \dfrac{1}{2}AC$. Значит, $EF = PK = \dfrac{1}{2}a$. Из того, что $EF \| PK$ и $EF = PK$, следует, что *EFPK* – параллелограмм. Т. е., $EK \| FP$, *EK* – средняя линия $\Delta BCD$, $EK = \dfrac{b}{2}$ и $FP = \dfrac{b}{2}$.

*Докажем*, что угол между скрещивающимися прямыми *DB* и *CA* равен 90°. Проведем высоту пирамиды *DO*. Точка *O* – центр правильного $\Delta ABC$. Продолжим отрезок BO до пересечения со стороной AB в точке M. В правильном $\Delta ABC$ отрезок *BM* – высота, медиана и биссектриса, значит, $BM \perp CA$. Итак, $BM \perp CA$, $DO \perp CA$. По признаку перпендикулярности прямой и плоскости, $CA \perp$пл. *BDM*, значит, $CA \perp BD$.

*Вывод:* раз $CA \perp BD$, а $PK \| CA$ и $EK \| BD$, то $PK \perp EK$ и четырехугольник *EFPK* становится прямоугольником.

$S_{EFPK} = PK \cdot EK = \dfrac{1}{2}a \cdot \dfrac{1}{2}b = \dfrac{1}{4}ab$. (*Ответ*: $\dfrac{1}{4}ab$.)

***№ 307*** (рис. 5).

***Решение***:

1) Построим сечение пирамиды плоскостью α, параллельной *MA* и проходящей через *BD*. Проведем в пл. *AMC* отрезок $OK \| AM$, отрезки *DK* и *BK*. $AM \| OK$, $OK \subset BKD$, значит, $AM \|$пл. *BDK*, пл. *BDK* есть искомая плоскость α. $AO = OC$, $OK \| AM$, значит, *OK* – средняя линия $\Delta AMC$,

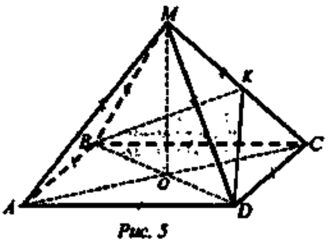


*Рис. 5*

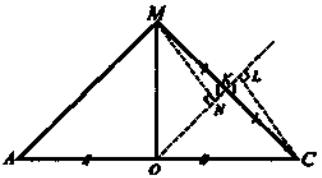


*Рис. 6*

$OK = \frac{1}{2}b$. $ABCD$ – квадрат, поэтому диагональ $BD = a\sqrt{2}$. $S_{BDK} = \frac{1}{2}BD \cdot OK$, так как $OK \perp BD$ ($AC \perp BD$, $MO \perp BD$ – значит, пл. $AMC \perp BD$, тогда, $OK \perp BD$). $S_{BDK} = \frac{1}{2}a\sqrt{2}\frac{1}{2}b = \frac{ab\sqrt{2}}{4}$.

2) Докажем, что точки $M$ и $C$ равноудалены от пл. $\alpha$. $OK$ – средняя линия $\Delta AMC$, $MK = KC$ (рис. 6). Проведем $MN \perp OK$ и $CL \perp OK$, $BD \perp$пл. $AMC$, значит, $BD \perp MN$ и $BD \perp CL$, тогда, $MN \perp$пл. $BDK$ и $CL \perp$пл. $BDK$, $MN$ и $CL$ и есть расстояние от точек $M$ и $C$ до пл. $\alpha$. $\Delta MNK = \Delta LCK$ (по гипотенузе и острому углу). Итак, $MN = CL$ (рис. 6). (*Ответ*: $\frac{ab\sqrt{2}}{4}$.)

**IV. Подведение итогов**

– Назовите формулы для определения полной поверхности а) призмы; б) пирамиды.

---

**Домашнее задание**

№ 308, 318.

*Краткий анализ домашнего задания.*

№ 308. а) дополнительные построения: OK⊥DC, OL⊥AD; отрезки KS и LS; б) рассмотреть ΔSOL и ΔSOK. Доказать равенство высот боковых граней. в) Найти OL и SL.

№ 318. а) произвести отсечение от вершины данного тетраэдра – правильный тетраэдр с ребром a; б) рассмотреть октаэдр; в) рассмотреть двугранные углы между плоскостями; г) перейти к линейным углам.

## Урок 60. Многогранники: параллелепипед, призма, пирамида

*Цель урока:*

– проверка использования теоретических знаний и практических навыков при решении задач по данной теме.

### Ход урока

**I. Организационный момент**

Сообщить тему урока, сформулировать цели урока.

**II. Актуализация знаний учащихся**

**Проверка домашнего задания по ранее заготовленному решению.**

***Задача № 308*** **(рис. 1)**

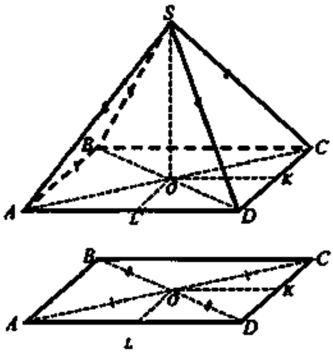


*Рис. 1*

***Решение*:** **Проводим $OK \perp DC$, $OL \perp AD$, отрезки $KS$ и $LS$. По теореме о трех перпендикулярах $SK \perp DC$ и $SL \perp AD$. Меньшая диагональ – $BD$, так как она лежит против острого угла ромба. $\Delta LOD = \Delta KOD$, поэтому $OL = OK$. Значит, $\Delta SOL = \Delta SOK$, $SK = SL$. Таким образом, высота всех четырех боковых граней равна. Из $\Delta AOD$ по теореме Пифагора: $OA = 4$ (см). $\cos\alpha = \dfrac{OD}{DA} = \dfrac{3}{5}$, $\sin\alpha = \sqrt{1 - \dfrac{9}{25}} = \dfrac{4}{5}$. Из $\Delta ODL$: $OL = 2{,}4$ (см), так как $\sin\alpha = \dfrac{OL}{OD}$, $\dfrac{4}{5} = \dfrac{OL}{3}$. Из $\Delta SOL$: $SL = \sqrt{SO^2 + OL^2} = \sqrt{3{,}2^2 + 2{,}4^2} = \sqrt{16} = 4$ (см). (*Ответ*: 4 см, 4 см, 4 см, 4 см.)**

***Задача№ 318*** **(рис. 2)**

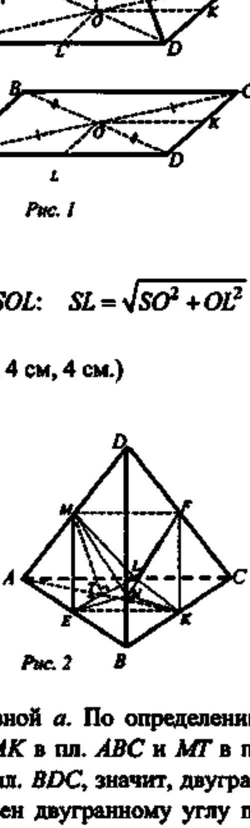


*Рис. 2*

***Решение*:** **Правильный тетраэдр $DABC$ служит каркасом (т.е. опорной фигурой) для построения правильного октаэдра. Для этого надо от каждой вершины правильного тетраэдра с ребром $2a$ отсечь правильный тетраэдр с ребром $a$. Все ребра образовавшегося внутреннего многогранника есть средние линии соответствующих граней – правильного тетраэдра, поэтому все ребра равны $a$, а грани многогранника – правильные треугольники со стороной равной $a$. По определению, полученный 8-гранник есть октаэдр. Проведем $AK$ в пл. $ABC$ и $MT$ в пл. $EML$; $T$ – точка пересечения $AK$ и $EL$. пл. $EML \parallel$ пл. $BDC$, значит, двугранный угол пл. $BDC$ с плоскостью основания равен двугранному углу пл. $EML$ с пл. $ABC$.**

**$AK \perp EL$. $MT$ – высота в равнобедренном $\Delta EML$, поэтому $MT \perp EL$. Отсюда $\angle ATM$ – линейный угол двугранного угла тетраэдра (у правильного тетраэдра все двугранные углы равны). $\angle MTK$ – линейный угол двугранного угла между плоскостями $EML$ и $KEL$ октаэдра. Поскольку $\angle ATM + \angle MTK = 180°$, то сумма соответствующих двугранных углов тоже 180°.**

**III. Самостоятельная работа** (см. приложение)

***Решение самостоятельной работы***

***I–II уровни***

***Вариант I*** (рис. 3)

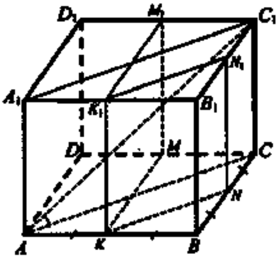



*Рис. 3*

1) $AC = 4\sqrt{2}$ (см) ($\Delta ABC$ – прямоугольный, $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2}$ ;

2) $\angle AC_1C = 30°$, так как $\angle C_1AC = 60°$, значит, $AC_1 = 2AC = 8\sqrt{2}$ (см);

3) $CC_1 = AC_1 \cdot \sin 60° = 8\sqrt{2} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{6}$ (см);

4) $S_{б.п.} = P \cdot h = 4 \cdot 4 \cdot 4\sqrt{6} = 64\sqrt{6}$ (см$^2$);

5) $S_{п.п.} = S_{б.п.} + 2\,S_{осн.} = 64\sqrt{6} + 2(4 \cdot 4) = 32(1 + 2\sqrt{6})$ (см$^2$);

6) $V = S_{осн.} \cdot h = 4^2 \cdot 4\sqrt{6} = 64\sqrt{6}$ (см$^3$);

7) $S_{AA_1C_1C} = AC \cdot CC_1 = 4\sqrt{2} \cdot 4\sqrt{6} = 32\sqrt{3}$ (см$^2$);

8) $KM = BC$, $S_{KK_1M_1M} = KM \cdot KK_1 = 4 \cdot 4\sqrt{6} = 16\sqrt{6}$ (см$^2$);

9) В $\Delta ACB$ $KN$ – средняя линия, значит, $KN = \dfrac{1}{2}AC = 2\sqrt{2}$ (см), $S_{KK_1N_1N} = 2\sqrt{2} \cdot 4\sqrt{6} = 16\sqrt{3}$ (см$^2$).

***II вариант*** (рис. 4)

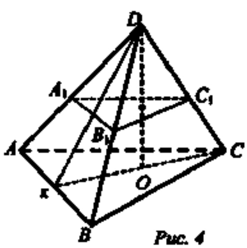



*Рис. 4*

1) $CK = BC \cdot \sin 60° = 6\sqrt{3}$ (см) (из $\Delta CKB$); $OC = \dfrac{2}{3}CK = 4\sqrt{3}$ (см) (по свойству медиан) $DO = \sqrt{DC^2 - OC^2} = \sqrt{10^2 - (4\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{13}$ (см);

2) $\angle DCK$ – угол между $DC$ и пл. $ACB$. Из $\Delta DOC$: $\sin\angle DCO = \dfrac{OD}{DC} = \dfrac{2\sqrt{13}}{10} = \dfrac{\sqrt{13}}{5}$, $\angle DCK = \arcsin\dfrac{\sqrt{13}}{5}$; Варианты ответов: $\angle DCK = \arccos\dfrac{2\sqrt{3}}{5}$; $\angle DCK = \mathrm{arctg}\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}}$.

3) Из $\Delta DKO$: $DK = \sqrt{DO^2 + KO^2} = \sqrt{(2\sqrt{13})^2 + (2\sqrt{3})^2} = 8$ (см). $\angle DKO$ – угол между пл. $ADB$ и пл. $ABC$, $\cos(DKO) = \dfrac{KO}{DK} = \dfrac{2\sqrt{3}}{8} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$;

$\angle DKO = \arccos\frac{\sqrt{3}}{4}$. варианты ответов: $\angle DKO = \arcsin\frac{\sqrt{13}}{4}$; $\angle DKO = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{13}}{3}$;

4) $S_{б.п.} = \frac{1}{2}P_{осн.}h_{AB} = \frac{1}{2}\cdot 3AB\cdot DK = \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 12\cdot 8 = 144$ (см$^2$);

5) $S_{п.п.} = S_{осн.} + S_{б.п.}$ $S_{осн.} = \frac{1}{2}KC\cdot AB = \frac{1}{2}\cdot 6\sqrt{3}\cdot 12 = 36\sqrt{3}$ (см$^2$), $S_{п.п.} = 36\sqrt{3} + 144$ (см$^2$);

6) $V = \frac{1}{3}S_{осн.}\cdot H = \frac{1}{3}36\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{13} = 24\sqrt{39}$ (см$^3$);

7) $S_{\Delta KDC} = \frac{1}{2}DO\cdot KC = \frac{1}{2}2\sqrt{13}\cdot 6\sqrt{3} = 6\sqrt{39}$ (см$^2$);

8) $S_{\Delta A_1B_1C_1} = \frac{1}{4}S_{осн.} = \frac{1}{4}36\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$ (см$^2$).

### *III уровень*

***I вариант***

***№ 1*** (рис. 5)

*Решение*:

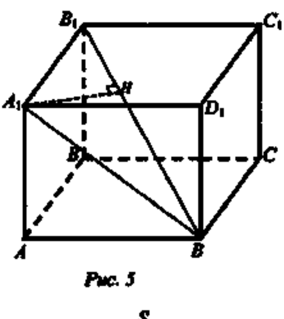



*Рис. 5*

1) $\Delta A_1B_1D$ – прямоугольный, $A_1B_1 = a$, тогда $A_1D = a\sqrt{2}$; $B_1D^2 = a^2 + a^2 + a^2 = 3a^2$, $B_1D = a\sqrt{3}$.
2) Выразим $S_{\Delta A_1B_1D}$ дважды:

$$S = \frac{1}{2}A_1B_1\cdot A_1D;\ S = \frac{1}{2}B_1D\cdot A_1H.$$

$$\frac{1}{2}a\cdot a\sqrt{2} = \frac{1}{2}a\sqrt{3}\cdot A_1H_1,$$

$$A_1H = a\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

(*Ответ*: $\frac{a\sqrt{6}}{3}$.)

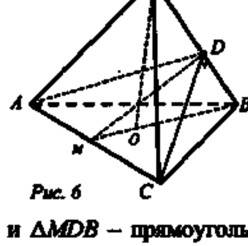



*Рис. 6*

***№ 2*** (рис. 6)

*Решение*:

1) Так как пл. $ADC \perp BC$, то $\Delta ADB$, $\Delta CDB$ и $\Delta MDB$ – прямоугольные; $\Delta ADB = \Delta CDB$ (по гипотенузе и катету, $AB = BC = a$, $DB$ – общий катет), значит, $AD = DC$.
2) $BM$ и $DM$ – медианы и высоты равнобедренных треугольников, $BM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

3) $O$ – центр окружности, описанной около основания, $OB = R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

4) $\Delta SOB$: $SB = \sqrt{SO^2 + OB^2} = \sqrt{h^2 + \frac{a^2}{3}} = \sqrt{\frac{3h^2 + a^2}{3}}$.

5) В $\Delta SOB$ и $\Delta MDB$ $\angle SBM$ – общий $\Rightarrow \Delta SOB \sim \Delta MDB$ (по двум углам), $\frac{MD}{SO} = \frac{MB}{SB}$; $MD = \frac{SO \cdot MB}{SB} = \frac{3ha}{2\sqrt{3h^2 + a^2}}$.

6) Площадь сечения $S = \frac{1}{2} AC \cdot MD$. $S = \frac{1}{2} a \frac{3ha}{2\sqrt{3h^2 + a^2}} = \frac{3ha^2}{4\sqrt{3h^2 + a^2}}$.

(*Ответ*: $\frac{3ha^2}{4\sqrt{3h^2 + a^2}}$.)

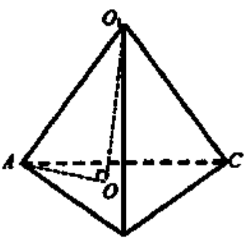


*Рис. 7*

***№ 3*** (рис. 7)

1) Так как все ребра равны, то $O$ – центр описанной около основания окружности. $AO = R$.

2) $S_{осн.} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} =$
$= \sqrt{10(10-6)(10-6)(10-8)} = 8\sqrt{5}$ (см²).
$R = \frac{abc}{4S} = \frac{6 \cdot 6 \cdot 8}{4 \cdot 8\sqrt{5}} = \frac{9}{\sqrt{5}}$ (см).

3) По теореме Пифагора: $OO_1 = \sqrt{AO_1^2 - AO^2} = \sqrt{81 - \frac{81}{\sqrt{5}}}$ (см).

4) $V = \frac{1}{3} S_{осн.} \cdot H = \frac{1}{3} 8\sqrt{5} \frac{18}{\sqrt{5}} = 48$ (см³).

(*Ответ*: 48 см³.)

***Вариант II***

***№ 1*** (рис. 8).

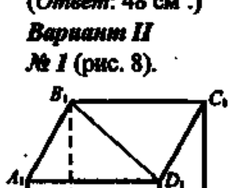


*Рис. 8*

*Решение*:

1) Пусть $AB = x$, $AD = y$. $BD^2 = x^2 + y^2$. Площадь основания $Q = xy$. Из прямоугольника $BB_1D_1D$: $M = BD \cdot h$, $BD = \frac{M}{h}$.

2) $BD^2 = x^2 + y^2$, $\frac{M^2}{h^2} = x^2 + y^2$. К обеим частям прибавим удвоенное $Q = xy$: $\frac{M^2}{h^2} + 2Q =$
$= x^2 + y^2 + 2xy$, $\frac{M^2}{h^2} + 2Q = (x+y)^2$, $x + y = \sqrt{\frac{M^2}{h^2} + 2Q}$.

3) Тогда, $S_{б.п.} = P \cdot h = 2(x+y) \cdot h$. $S_{б.п.} = 2h\sqrt{\dfrac{M^2}{h^2} + 2Q} = 2\sqrt{M^2 + 2Qh^2}$.

(*Ответ*: $2\sqrt{M^2 + 2Qh^2}$.)

***№ 2*** (рис. 9)

***Решение***:

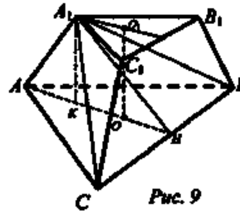


*Рис. 9*

1) $OO_1$ – высота, $O$ и $O_1$ – центры окружностей, описанных около оснований.

$$A_1O_1 = \frac{A_1B_1\sqrt{3}}{3} = \frac{5\sqrt{3}}{3} \text{ (м)};$$

$$AO = \frac{AB\sqrt{3}}{3} = \frac{8\sqrt{3}}{3} \text{ (м)}.$$

2) $AH \perp BC$, $\Delta ABH$: $AH = \dfrac{AB\sqrt{3}}{2} = \dfrac{8\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$ (м).

3) $\left.\begin{matrix} A_1K \perp AH; \\ AH \perp BC. \end{matrix}\right\}$ по теореме о трех перпендикулярах $A_1H \perp BC$, $\angle A_1HA$ – линейный угол искомого двугранного угла.

4) $A_1O_1OK$ – прямоугольник, $A_1O_1 = KO$, $AK = AO - KO = \dfrac{8\sqrt{3}}{3} - \dfrac{5\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$ (м).

5) $KH = AH - AK = 4\sqrt{3} - \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$ (м).

6) $\Delta A_1KH$: $\text{ctg}(A_1HK) = \dfrac{KH}{A_1K} = \dfrac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$, $\angle A_1HK = 30°$.

7) По теореме Пифагора $A_1H = \sqrt{A_1K^2 + KH^2} = \sqrt{3^2 + (3\sqrt{3})^2} = 6$ (м).

7) $S_{сеч.} = \dfrac{1}{2} BC \cdot A_1H = \dfrac{1}{2} 8 \cdot 6 = 24$ (м$^2$).

(*Ответ*: 30°, 24 м$^2$.)

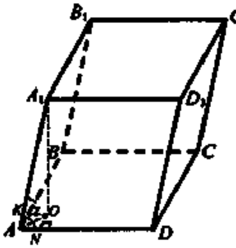


*Рис. 10*

***№ 3*** (рис. 10)

***Решение***:

1) Основание – прямоугольник $ABCD$ со сторонами $a$ и $b$. $S_{ABCD} = ab$.

2) $A_1O \perp$ пл. $(ABC)$, $OM \perp AD$, $OK \perp AB$.

3) $\Delta AA_1M = \Delta AA_1K$ (по гипотенузе и острому углу $\alpha$). $AK = AM = AA_1 \cdot \cos\alpha = c \cdot \cos\alpha$.

4) В $\Delta AMO$ и $\Delta AKO$ $AO$ – общая сторона, $\Delta AMO = \Delta AKO$ (по гипотенузе и катету), $AO = \dfrac{AK}{\cos(KAO)} = \dfrac{C \cdot \cos\alpha}{\cos 45°} = c \cdot \cos\alpha \cdot \sqrt{2}$.

5) $\Delta AA_1O$: $A_1O = \sqrt{AA_1^2 - AO^2} = \sqrt{c^2 - 2c^2\cos^2\alpha} = c\sqrt{1 - 2\cos^2\alpha} =$ $= c\sqrt{-\cos 2\alpha}$,

6) $V = S_{осн.} \cdot H = abc\sqrt{-\cos 2\alpha}$.

(*Ответ*: $abc\sqrt{-\cos 2\alpha}$.)

**IV. Подведение итогов урока**

– Какие данные необходимы для нахождения объема призмы?

---

**Домашнее задание (в трех уровнях):**

1. Задачи для домашнего задания из вариантов тестов ЕГЭ.

I уровень. Боковые ребра тетраэдра попарно перпендикулярны и равны 4 м, 5 м, 6 м. *Найти* его объем.

II уровень. Дан правильный тетраэдр $S_{ABC}$, объем которого равен $V$. На ребрах $SA$ и $SB$ взяты их середины $D$ и $E$, а на ребре $SC$ взята точка $F$ такая, что $SF : FC = 1 : 3$. *Найти* объем пятигранника $DEFABC$.

III уровень. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ сторона квадрата $ABCD$, лежащего в основании, равна $\sqrt{2}$, а высота, опущенная на основание, равна 2. *Найти* расстояние от точки $A$ до плоскости $SBC$.

2. Повторить теорию: гл. V.

***Решение домашних задач***

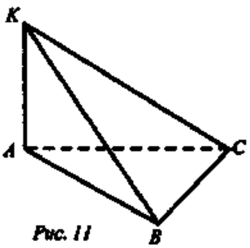


*Рис. 11*

***I уровень***

«Поставим» пирамиду на боковую грань. По условию $AK \perp AB$, $AK \perp AC \Rightarrow AK \perp$ пл. $ABC$, $AK$ – высота пирамиды (рис. 11). $V = \frac{1}{3} S_{осн.} \cdot H$.

$S_{осн.} = \frac{1}{2} AC \cdot AB = \frac{1}{2} 5 \cdot 4 = 10$ (м$^2$). $V = \frac{1}{3} 10 \cdot 6 =$ $= 20$ (м$^3$). (*Ответ*: 20 м$^3$.)

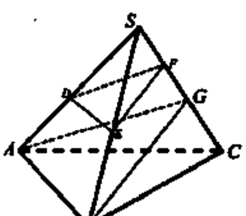


*Рис. 12*

***II уровень***

*Решение*:

1) $G$ – середина $SC$, $F$ – середина $SG$, $EF$ – средняя линия $\Delta SBG$, $DF$ – средняя линия $\Delta SAG$. $DE$ – средняя линия $\Delta SAB$ (рис. 12). Тогда пирамиды $SDEF$ и $SABG$ подобны с коэффициентом.

2) $8V_{DEFS} = V_{SABG}$, $V_{SABG} = \frac{1}{2} V$, так как $SG \perp AG$, $SG \perp BG \Rightarrow SC \perp$ пл. $ABG$. Следовательно, $V_{SABG} = V_{SABG}$.

$V_{SDEF}=\frac{1}{8}V_{SABG}=\frac{1}{8}\frac{1}{2}V=\frac{1}{16}V$, $V_{DEFABC}=V-\frac{1}{16}V=\frac{15}{16}V$.

(*Ответ*: $\frac{15}{16}V$.)

### *III уровень*

*Решение*: Опустим высоту $SH$ на основание и проведем плоскость через эту высоту и точку $E$, где $E$ – середина $AD$. Эта плоскость пересечет пирамиду по $\Delta SEF$. $F$ – середина $BC$ (рис. 13). В $\Delta SEF$ проведем высоту $EK$.

$\Delta SHF \sim \Delta EKF$ (по двум углам). $\frac{SH}{SF}=\frac{EK}{EF}$,

$$EK=\frac{SH\cdot EF}{SF}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{(\sqrt{2}/2)^2+2^2}}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{4,5}}=\frac{4}{3}.$$

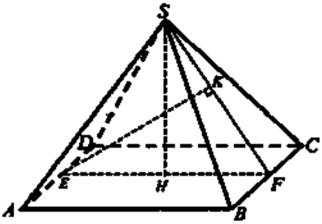


*Рис. 13*

Проверим, что $EK$ действительно перпендикуляр к плоскости $SBC$. По построению $EK \perp SF$. $EF$ – проекция наклонной $EK$ на основание пирамиды. $EF \perp BC \Rightarrow$ по теореме о трех перпендикулярах $EK \perp BC$, так как $EK$ перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости $SBC$, следовательно, $EK \perp$пл. $SBC$. (*Ответ*: $\frac{4}{3}$.)

## Урок 61. Повторение. Векторы в пространстве. Действия над векторами. Скалярное произведение векторов

*Цель урока:*

– повторить и систематизировать знания учащихся по пройденным темам.

## Ход урока

**I. Организационный момент**

Сообщить тему урока, сформулировать цели урока.

**II. Проверка домашней работы**

**III. Актуализация знаний учащихся**

Повторение теоретического материала.

1. Ответы на вопросы:

– определение векторов;
– равные векторы. Длина вектора;
– коллинеарные векторы;
– компланарные векторы;
– единичный вектор;
– координатные вектора;

- дан вектор $\vec{a}\,\{3; 4; 5\}$. Разложить его по координатным векторам;
- найти длины векторов $\vec{b}\,\{3; 0; 0\}$ и $\vec{c}\,\{0; -4; 3\}$;
- что называют скалярным произведением двух векторов?
- свойства скалярного произведения;
- найти: $\vec{a}\vec{b}$, $\vec{a}\vec{c}$, $\vec{b}\vec{c}$.

2. Пока проходит опрос, ученик выполняет задание на закрытой доске: заполняет пропуски в записи.

а) $\overline{AB}+\ldots=\overline{AM}$; б) $\overline{AB}+\ldots=\bar{0}$; в) $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, значит, $\vec{b}=\ldots$; г) если $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – не коллинеарные вектора, то $\vec{p}=\ldots$; д) $\bar{a}\cdot\bar{b}=\left\langle \begin{matrix}\ldots\\ \ldots\end{matrix}\right.$; е) $\cos\alpha=\left\langle \begin{matrix}\ldots\\ \ldots\end{matrix}\right.$; ж) если $\vec{a}\perp\vec{b}$, то …; з) $\bar{a}\cdot\bar{b}<0$, то угол $\widehat{\bar{a}\,\bar{b}}=\ldots$ и) если угол $\widehat{\bar{a}\,\bar{b}}$ – острый, то …

3. Индивидуальная работа по карточкам (три уровня сложности).

*I уровень*

*Вычислить* угол между прямыми $AB$ и $CD$, если $A(1; 1; 0)$, $B(3; -1; 0)$, $C(4; -1; 2)$, $D(0; 1; 0)$.

*II уровень*

*Дано*: $ABCD$ – параллелограмм. $A(-6; -4; 0)$, $B(6; -6; 2)$, $C(10; 0; 4)$. Найти координаты вершины $D$ и угол между векторами $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$.

*III уровень*

*Дано*: $MABC$ – тетраэдр. $M(2; 5; 7)$, $A(1; -3; 2)$, $B(2; 3; 7)$, $C(3; 6; 2)$. Найти расстояние от точки $M$ до точки $O$ пересечения медиан $\Delta ABC$.

*Решение*:

*I уровень*

$\overrightarrow{AB}\,\{2; -2; 0\}$; $\overrightarrow{CD}\,\{-4; 2; -2\}$, $\cos\varphi=$

$$=\frac{2(-4)+(-2)+0(-2)}{\sqrt{2^2+(-2)^2+0^2}\cdot\sqrt{(-4)^2+2^2+(-2)^2}}=\frac{-\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\varphi=150°.$$

*II уровень*

1) $O$ – середина $AC$ (диагонали) $O\left(\frac{-6+10}{2}; \frac{-4+10}{2}; \frac{0+4}{2}\right)$, $O(2; -2; 2)$.

2) $O$ середина $BD$ (диагонали) $2=\frac{6+x_D}{2}$, $x_D=-2$; $-2=\frac{-6+y_D}{2}$, $y_D=2$; $2=\frac{2+z_D}{2}$, $z_D=2$. $D(-2; 2; 2)$.

3) $\overrightarrow{AC}\,\{16; 4; 4\}$, $\overrightarrow{BD}\,\{-8; 8; 0\}$, $\cos\varphi=$

$$=\frac{16(-8)+4\cdot 8+4\cdot 0}{\sqrt{16^2+4^2+4^2}\cdot\sqrt{(-8)^2+8^2+0^2}}=\frac{-96}{12\sqrt{2}\cdot 8\sqrt{2}}=-\frac{1}{2},$$ следовательно,

$\varphi=120°$.

(*Ответ*: $D(-2; 2; 2)$, $\varphi=120°$.)

***III уровень***

(Рис. 1)

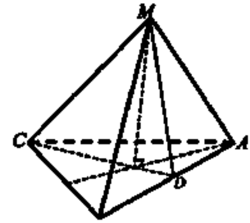



*Рис. 1*

1) $D$ – середина $AB$, $D\left(\frac{3}{2}; 0; \frac{9}{2}\right)$;

2) $DC^2 = \left(3-\frac{3}{2}\right)^2 + (6-0)^2 + \left(0-\frac{9}{2}\right)^2 =$

$= \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 6^2\left(-\frac{9}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} + 36 + \frac{81}{4} = \frac{234}{4},$

$DC = \frac{1}{2}\sqrt{234}.$

3) $DO = \frac{1}{3}DC$ (по свойству медиан) $DO = \frac{1}{6}\sqrt{234}.$

4) $MD^2 = \left(\frac{3}{2}-2\right)^2 + (0-5)^2 + \left(\frac{9}{2}-7\right)^2 = -\left(\frac{1}{2}\right)^2 + (-5)^2 + \left(-\frac{5}{2}\right)^2 =$

$= \frac{1}{4} + 25 + \frac{25}{4} = \frac{126}{4}.$

5) $\Delta MOD$ (прямоугольный): $MO^2 = MD^2 - OD^2$. $MO = \sqrt{MD^2 - OD^2} =$

$= \sqrt{\frac{126}{4} - \frac{234}{36}} = \sqrt{\frac{900}{36}} = \sqrt{25} = 5.$

(*Ответ*: 5.)

## IV. Решение задач

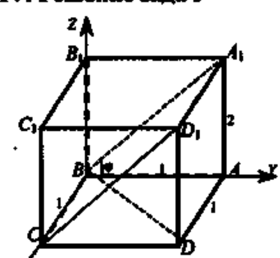



*Рис. 2*

***№ 467а). Дано***: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямоугольный параллелепипед. $AB = BC = \frac{1}{2}AA_1$ (рис. 2)

*Найти:* угол между прямыми $BD$ и $CD_1$.

Решение задачи желательно записать двумя способами.

*I способ:*

1) Введем системы координат. $B(0; 0; 0)$, $D(1; 1; 0)$, $C(1; 0; 0)$, $D_1(1; 1; 2)$.

2) $\overrightarrow{BD}\{1; 1; 0\}$, $\overrightarrow{CD_1}\{0; 1; 2\}$; $\cos\varphi \frac{|1\cdot 0 + 1\cdot 1 + 0\cdot 2|}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}\cdot\sqrt{0^2+1^2+2^2}} = \frac{1}{\sqrt{10}},$

$\arccos\frac{1}{\sqrt{10}} = \varphi.$

*II способ.*

1) Угол между прямыми $BD$ и $CD_1$ раyглу между $BD$ и $BA_1$.

2) В $\Delta BDA_1$ имеем $BA_1 = \sqrt{5}$, $A_1D = \sqrt{5}$, $BD = \sqrt{2}$.

3) По теореме косинусов $\cos\varphi=\dfrac{5+2-5}{2\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{10}}$, $\varphi=\arccos\dfrac{1}{\sqrt{10}}$.

(*Ответ*: ≈71°34′.)

**№ 472.** *Дано*: куб $MNPQM_1N_1P_1Q_1$.

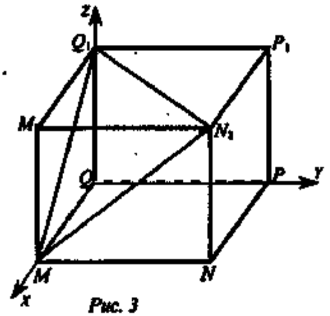



*Рис. 3*

*Доказать*, что прямая $PM$ перпендикулярна к плоскостям $MN_1Q$ и $QNP_1$. Составить план решения:

1) ввести систему координат, найти координаты векторов $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{MQ_1}$, $\overrightarrow{PM_1}$.
2) доказать с помощью скалярного произведения, что $MN_1 \perp PM_1$, $MQ_1 \perp PM_1$.
3) сделать вывод по признаку перпендикулярности прямой и плоскости, что $MN_1Q_1 \perp PM_1$.

***Решение***:

1) введем систему координат. $M(1;\,0;\,0)$, $N_1(1;\,1;\,1)$, $Q(0;\,0;\,1)$, $P(0;\,1;\,0)$, $M_1(1;\,0;\,1)$.
2) $\overrightarrow{MN_1}\,\{0;\,1;\,1\}$, $\overrightarrow{MQ_1}\,\{-1;\,0;\,1\}$, $\overrightarrow{PM_1}\,\{1;\,-1;\,1\}$.
3) $\overrightarrow{MN_1}\cdot\overrightarrow{PM_1}=0\cdot1+1\cdot(-1)+1\cdot1=0$. Значит, $\overrightarrow{MN_1}\perp\overrightarrow{PM_1}$ и $\overrightarrow{MQ_1}\perp\overrightarrow{PM_1}$.
4) $\overrightarrow{MQ_1}\cdot\overrightarrow{PM_1}=-1\cdot1+0\cdot(-1)\,1\cdot1=0$. Значит, $\overrightarrow{MQ_1}\perp\overrightarrow{PM_1}$ и $\overrightarrow{MN_1}\perp\overrightarrow{PM_1}$. Поэтому, пл. $MN_1Q_1\perp\overrightarrow{PM_1}$.

***Дополнительная задача.***

*Дано*: векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=\sqrt{2}$, $\widehat{\vec{a}\,\vec{b}}=135°$.

*Найти*: $|\vec{a}-2\vec{b}|$.

(*Ответ*: $2\sqrt{5}$.)

## V. Подведение итогов

– Какие вектора называются: а) коллинеарными; б) компланарными?

---

## Домашнее задание

Повторить гл. V, № 469.

## Урок 62. Повторение. Цилиндр, конус и шар, площади их поверхностей

*Цели урока:*

– систематизировать теоретические знания по темам;

– совершенствовать навыки решения задач.

## Ход урока

### I. Организационный момент

### II. Актуализация знаний учащихся

Повторение теории по таблицам. Учащиеся в течение 5–7 минут самостоятельно повторяют теорию используя таблицы.

А. Цилиндр (рис. 1)
$OO_1 = H$ – высота цилиндра;
$S_{осн.} = \pi R^2$; $S_{бок.} = 2\pi RH$;
$S_{полн.} = 2\pi R(R + H)$.

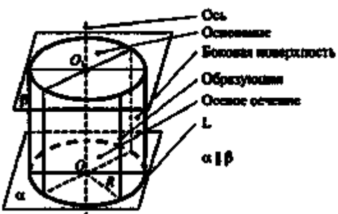



*Рис. 1*

Б. Конус (рис. 2)
$SO = H$ – высота;
$S_{бок.} = \pi Rl$, $l$ – образующая;
$S_{полн.} = \pi R(l + R)$.

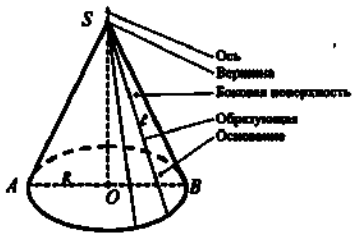



*Рис. 2*

В. Усеченный конус (рис. 3)
$S_{бок.} = \pi(r_1 + r_2)l$
$S_{полн.} = S_{бок.} + \pi(r_1^2 + r_2^2)$

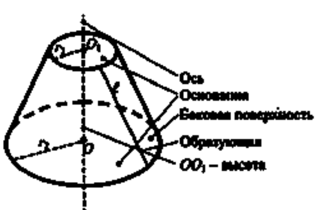



*Рис. 3*

Г. Шар (рис. 4)
$S_{сф.} = 4\pi R^2$

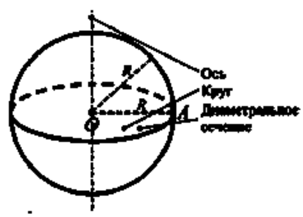



*Рис. 4*

### III. Решение задач по готовым чертежам.

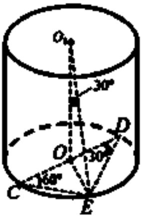



*Рис. 5*

1. (рис. 5).

*Найти*: $S_{бок.}$

*Решение*:

1) $\Delta COE$ – равнобедренный треугольник, так как $CO = OE \Rightarrow \angle OEC = 60°$.
2) $\angle CED$ – вписанный, $\angle CED = 90°$, $\angle CDE = 30°$.
3) $\cos 30° = \dfrac{30}{CD}$, $\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{30}{CD}$, $CD = 20\sqrt{3}$.

4) $R = 10\sqrt{3}$.

5) $\Delta OO_1E$ – прямоугольный, $\angle OO_1E = 30°$. $\text{tg}30° = \dfrac{R}{OO_1}$, $\dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{10\sqrt{3}}{OO_1}$;

$OO_1 = H = 30$.

6) $S_{бок.} = 2\pi RH$, $S_{бок.} = 2\pi \cdot 10\sqrt{3} \cdot 30 = 600\sqrt{3}\,\pi$.

(*Ответ*: $600\sqrt{3}\,\pi$.)

2. (рис. 6).

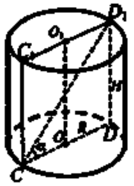


*Рис. 6*

$S_{CC_1D_1D} = Q$, $S_{боков.}$ – ?

*Решение*:

1) $\text{tg}\alpha = \dfrac{H}{2R}$, $H = 2R\text{tg}\alpha$.

2) $Q = H \cdot 2R$, $Q = 2R\text{tg}\alpha° \cdot 2R = 4R^2\text{tg}\alpha$.

3) $R^2 = \dfrac{Q}{4\text{tg}\alpha}$, $R = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{Q}{\text{tg}\alpha}}$,

4) $H = 2 \cdot \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{Q}{\text{tg}\alpha}} \cdot \text{tg}\alpha = \sqrt{Q\text{tg}\alpha}$.

5) $S_{бок.} = 2\pi RH$, $S_{бок.} = 2\pi \cdot \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{Q}{\text{tg}\alpha}} \cdot 2R\text{tg}\alpha = 2\pi \cdot \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{Q}{\text{tg}\alpha}} \cdot \sqrt{Q\text{tg}\alpha} = \pi Q$.

(*Ответ*: $\pi Q$.)

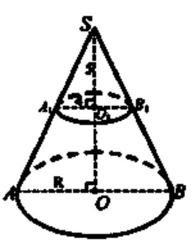


*Рис. 7*

3. (рис. 7).

$SO = 15$. $A_1B_1$, $W(O_1; O_1A_1)$ – сечение конуса.

$S_{полн.}$ – ?

1) $\Delta A_1O_1S \sim \Delta AOS$ по 2-м углам, значит,

$\dfrac{A_1O_1}{AO} = \dfrac{SO_1}{SO}$, $\dfrac{4}{R} = \dfrac{5}{15}$; $R = 12$.

2) $S_{полн.} = \pi R(l + R)$.

3) $l = AS$, из $\Delta AOS$ $l = \sqrt{R^2 + SO^2}$;

$l = \sqrt{144 + 225} = \sqrt{369} = 3\sqrt{41}$.

4) $S_{полн.} = 12\pi(3\sqrt{41} + 12) = 36\pi(\sqrt{41} + 4)$.

(*Ответ*: $36\pi(\sqrt{41} + 4)$.)

*Рис. 8*

4. (рис. 8)

$\Delta ABC$ – правильный, $OO_1 = 3$.

$S_{ш.}$ – ?

$S_{сеч.CAB}$ – ?

1) $\Delta CO_1O$ – прямоугольный, $CO = R_{ш.}$

2) $O_1C = r$, $r$ – радиус описанной окружности около

$\Delta ABC\ r = \dfrac{2\cdot 3\sqrt{3}}{6} = \sqrt{3},\ CO_1 = \sqrt{3}.$

3) $S_{\text{сеч.}} = \pi \cdot CO_1{}^2 = 3\pi.$

4) $\Delta CO_1O$ – прямоугольный $CO = \sqrt{CO_1{}^2 + 3^2}$; $CO = \sqrt{12} = 2\sqrt{3},$

$R = 2\sqrt{3}.$

5) $S_{\text{ш.}} = 4\pi R^2,\ S_{\text{ш}} = 4\pi \cdot 4 \cdot 3 = 48\pi.$

(*Ответ*: $48\pi$.)

## IV. Решение задач

1. Прямоугольная трапеция с основаниями 6 см и 10 см и высотой 3 см вращается около большего основания. *Найдите* площадь поверхности тела вращения. (*Ответ*: 60 см$^2$.)
2. Прямоугольная трапеция с основаниями 12 см и 20 см и высотой 15 см в первый раз вращается около меньшего основания, а во второй – около большего. *Сравните* площади поверхностей тел вращения. (*Ответ*: в первом случае на $240\pi$ см$^2$ больше.)
3. В конус вписана пирамида $MABC$, основанием которой служит прямоугольный треугольник с катетами $AB = 12$ см и $BC = 16$ см. Двугранный угол при катете $BC$ равен 60°. *Найдите*: а) площадь грани $MBC$; б) площадь боковой поверхности конуса.
4. Высота конуса равна $h$, образующая равна $l$. *Найдите* радиус описанного около конуса шара.

*Решение*:

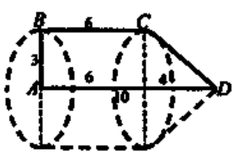



*Рис. 9*

1. (рис. 9).

$S_{\text{пов.}} = S_{\text{б.кон.}} + S_{\text{б.цил.}} + S_{\text{осн.}} = \pi Rl + 2\pi RH + \pi R^2 =$

$= \pi R(l + 2H + 3)$, где $l = DC$, $l = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$ (см).

$R = AB = 3$, $H = BC = 6$ см. $S_{\text{пов.}} = \pi \cdot 3(5 + 12 + 3) = 60\pi$ (см$^2$). (*Ответ*: $60\pi$ см$^2$.)

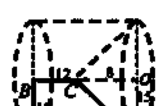



*Рис. 10*

2. (рис. 10)

а) $S_{\text{полн.}} = S_{\text{кр.}} + S_{\text{бок.цил.}} + S_{\text{бок.кон.}}$; $S_{\text{кр.}} = \pi \cdot 15^2 = 225\pi$ (см$^2$); $S_{\text{бок.ц.}} = 2\pi \cdot 15 \cdot 20 = 30 \cdot 20\pi = 600\pi$ (см$^2$); $S_{\text{бок.кон.}} = \pi Rl$, где $R = 15$ см,

$l = \sqrt{15^2 + 8^2} = \sqrt{289} = 17$ (см);

$S_{\text{бок.кон.}} = \pi \cdot 15 \cdot 17 = 255\pi$(см$^2$).

$S_{\text{полн.}} = 225\pi + 600\pi + 255\pi = 1080\pi$ (см$^2$).

б) $S_{\text{полн.}} = S_{\text{кр.}} + S_{\text{бок.ц.}} + S_{\text{бок.кон.}}$; $S_{\text{кр.}} = 225\pi$ (см$^2$);

$S_{\text{бок.цил.}} = 2\pi \cdot 15 \cdot 12 = 360\pi$ (см$^2$); $S_{\text{кон.бок.}} = 255\pi$ (см$^2$);

$S_{\text{полн.}} = 225\pi + 360\pi + 255\pi = 840\pi$ (см$^2$); $1080\pi - 840\pi = 240\pi$ (см$^2$).

(*Ответ*: на $240\pi$ см$^2$ в первом случае больше.)

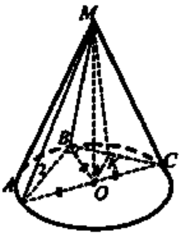


*Рис. 11*

3. (рис. 11)

а) 1) $\angle OKM = 60°$ – линейный угол двугранного угла $OBCM$ ($OK \perp BC$, $MK \perp BC$);

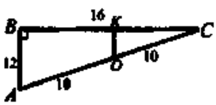
2) $AC = \sqrt{12^2 + 16^2} = \sqrt{144 + 256} = \sqrt{400} = 20$ (см); (так как $\Delta ABC$ – прямоугольный).

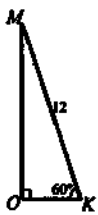
3) Так как $\Delta ABC$ – прямоугольный, то $O$ – середина гипотенузы и центр описанной окружности.

4) $OK$ – средняя линия $\Delta ABC$ ($OK \perp AB$, $AB \perp BC \Rightarrow OK \parallel AB$; $O$ – середина $AC \Rightarrow K$ – середина $BC$).

5) $\Delta OMK$ – прямоугольный ($OM \perp ABC$), $\angle OMK = 30° \Rightarrow$ $\Rightarrow MK = 12$ см.

6) $S_{MBC} = \dfrac{1}{2} BC \cdot MK$; $S_{MBC} = \dfrac{1}{2} \cdot 16 \cdot 12 = 6 \cdot 16 = 96$ (см$^2$);




б) 1) Из $\Delta OMK$: $OM = \sqrt{12^2 - 6^2} = \sqrt{144 - 36} = \sqrt{108} = 6\sqrt{3}$ (см);

2) $\Delta BOM$ – прямоугольный: $BO = R = 10$ см; $OM = 6\sqrt{3}$ см; $BM = \sqrt{100 + 108} = \sqrt{208} = 4\sqrt{13}$ (см); $BM = l$;

3) $S_{бок.кон.} = \pi R l$, $S = \pi \cdot 10 \cdot 4\sqrt{13} = 40\pi\sqrt{13}$ (см$^2$).

(*Ответ*: а) 96 см$^2$; б) $40\pi\sqrt{13}$ см$^2$.)

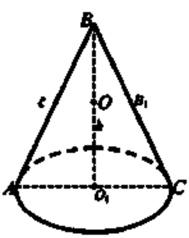


*Рис. 12*

4. (рис. 12).

1) $r = AO_1 = \sqrt{l^2 - h^2}$; $AC = 2\sqrt{l^2 - h^2}$;

2) $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot 2\sqrt{l^2 - h^2} \cdot h = h\sqrt{l^2 - h^2}$;

3) $R = \dfrac{abc}{4S}$ – радиус описанной окружности около $\Delta ABC$ со сторонами $a$, $b$, $c$, площадью $S$.

$$R = \frac{2\sqrt{l^2 - h^2}\, l \cdot h}{4h\sqrt{l^2 - h^2}} = \frac{l}{2}.$$ (*Ответ*: $\dfrac{l}{2}$.)

**V. Подведение итогов**

– Назовите основные элементы а) цилиндра; б) конуса.

---

**Домашнее задание**

1) Повторить главу VI, §1, 2, 3.

2) Решить оставшиеся нерешенными на уроке задачи.

## Урок 63. Повторение по теме: «Объемы тел»

*Цели урока:*

– организовать повторение основных теоретических фактов;
– проверить знание формул;
– повторить наиболее распространенные приемы решения задач;
– совершенствовать навыки решения задач, познакомить с некоторыми теоретическими факторами.

### Ход урока

**I. Организационный момент**

Сообщить тему урока, цели урока.

**II. Актуализация знаний учащихся**

а) Рассмотреть таблицу, вспомнить формулы.

б) Напомнить, что отношение объемов подобных тел равно кубу коэффициента подобия, а отношение боковых поверхностей квадрату коэффициента подобия, т.е. $\frac{V_1}{V_2}=\frac{H_1^3}{H_2^3}=\frac{R_1^3}{R_2^3}$ и т.д.;

$\frac{S_{1бок.}}{S_{2бок.}}=\frac{H_1^2}{H_2^2}=\frac{R_1^2}{R_2^2}=\frac{S_{осн.1}}{S_{осн.2}}$.

в) Вставить пропущенное (на крыльях доски заранее записаны формулы с пропущенными символами). 2 человека работают у доски. Оценивается лучшая работа.

Призма: $S_{бок.}=P_{1сеч.}\cdot AA_1$, где $AA_1$ – боковое ребро.

$V=S_{осн.}\cdot H$.

Пирамида: $V=\frac{1}{3}S_{осн.}\cdot H$.

Усеченная пирамида: $V=\frac{1}{3}H(S_1+\sqrt{S_1S_2}+S_2)$, где $S_1$, $S_2$ – площади оснований.

Цилиндр: $V=\pi R^2H$. Шар: $V=\frac{4}{3}\pi R^3$. Конус: $V=\frac{1}{3}\pi R^2H$.

**III. Несколько полезных добавлений в копилку теоретических знаний** (чертежи заготовлены заранее) (10 мин)

1) В каком отношении делится объем произвольной пирамиды плоскостью, проходящей через вершину пирамиды и пересекающей ее основание (рис. 1).

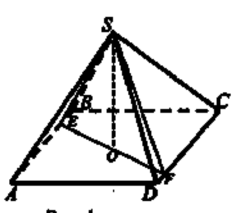


*Рис. 1*

Для удобства, рассмотрим произвольную четырехугольную пирамиду. $V_1=V_{AEFDS}=\frac{1}{3}S_{AEFD}\cdot H$, где

$H = SO$. $V_2 = V_{EBCFS} = \frac{1}{3} S_{EBCF} \cdot H \Rightarrow$ пирамиды имеют общую высоту $\frac{V_1}{V_2} = \frac{S_{AEFD}}{S_{EBCF}}$. (*Ответ*: $\frac{V_1}{V_2} = \frac{S_{осн.1}}{S_{осн.2}}$.)

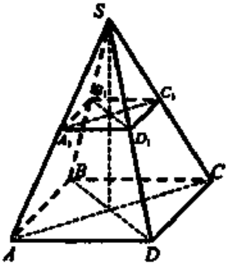



*Рис. 2*

2) В каком отношении делит объем пирамиды плоскость параллельная основанию и пересекающая боковые ребра (рис. 2).

$V_1$ – объем усеченной пирамиды, $V_2$ – объем верхней пирамиды, $V$ – объем исходной пирамиды. Исходная пирамида и отсеченная верхняя пирамида подобны, поэтому $\frac{V_2}{V} = K^3$, а $\frac{S_{A_1B_1C_1D_1}}{S_{ABCD}} = K^2 \Rightarrow K = \sqrt{\frac{S_{сеч.}}{S_{осн.}}}$. $V_1 = V - V_2$, значит

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{V - V_2}{V_2} = \frac{V}{V_2} - 1 = \frac{1}{K^3} - 1 = 1 : \left(\sqrt{\frac{S_{сеч.}}{S_{осн.}}}\right)3 - 1 = \quad = \left(\sqrt{\frac{S_{осн.}}{S_{сеч.}}}\right) - 1.$$

(*Ответ*: $\frac{V_1}{V_2} = K_1{}^3 - 1$, где $K_1 = \sqrt{\frac{S_{осн.}}{S_{сеч.}}}$.)

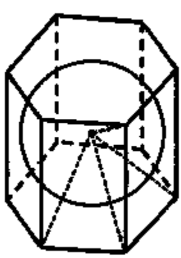


*Рис. 3*

3) Доказать, что объем произвольного многогранника в который можно вписать шар радиуса $R$ связан с площадью $S_н$ поверхности этого многогранника формулой: $V = \frac{1}{3} S_н \cdot R$ (рис. 3).

Соединим центр шара с вершинами многогранника. Многогранник разобьется на пирамиды, вершины которых будут центром шара, а основаниями грани многогранника, высоты всех пирамид будут равны радиусу шара (по св-ву касательной плоскости).

Тогда объем многогранника будет равен сумме объемов пирамид.

$$V = \frac{1}{3} S_1 \cdot R + \frac{1}{3} S_2 \cdot R + \ldots + \frac{1}{3} S_n \cdot R = \frac{1}{3} R(S_1 + S_2 + \ldots + S_n) = \frac{1}{3} S_н \cdot R$$

что и требовалось доказать.

Прием разбиения тела на более простые часто используется при решении задач. Например: Центр куба, ребро которого $a$, соединен со всеми его вершинами. Определите объем каждой из полученных пирамид.

*Решение*: Восемь проведенных отрезков делят куб на 6 равных пирамид, поэтому $V_п = \frac{1}{6} V_{куба} = \frac{1}{6} a^3$.

Какие еще методы регулярно используются? (устное обсуждение, выводы записать в тетрадь) (3 мин.)

**IV. Методы решения**

а) непосредственное нахождение элементов геометрического тела и нахождение неизвестного с помощью формул.

б) введение линейной или угловой неизвестной с последующим составлением уравнения.

в) использование свойств подобных тел, свойств сечений, свойства проекции плоского многоугольника ($S_{пр.} = S_{сеч.} \cdot \cos\alpha$, где $\alpha$ – угол между плоскостями).

г) применение сведений о взаимном расположении тел в задачах на комбинацию нескольких тел.

д) векторно-координатный метод.

Чаще всего при решении задачи используют сразу несколько методов. Рассмотрим это на конкретных примерах.

**V. Решение задач**

(учащиеся с помощью магнитов вывешивают плакаты со своими решениями, рассказывают какие методы использованы) (20 мин.)

1. В правильном тетраэдре построено сечение его плоскостью, проходящей через ребро $AC$ и точку $K$, принадлежащую ребру $SB$, причем $BK : KS = 2 : 1$ (рис. 4).

Найти объем отсеченной пирамиды $KABC$, если ребро тетраэдра равно $a$.

*Дано*: $ABCS$ – тетраэдр; $K \in BS$; $BK : KC = 2 : 1$; $AB = BC = AC = AS = a$.

*Найти*: $V_{KABC}$.

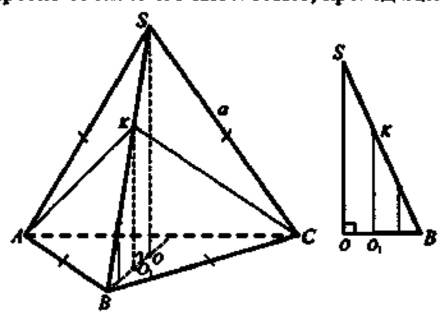



Рис. 4

*Решение*:

1) $SO \perp (ABC)$;

$KO_1 \perp (ABC) \Rightarrow SO \parallel KO_1$, тогда $SO \in (SBO)$ и $KO_1 \in (SBO) \Rightarrow O_1 \in BO$.

2) $(BSO)$: по теореме о пропорцион. отрезках $BO_1 : O_1O = 2 : 1 \Rightarrow \Delta KBO_1 \sim \Delta SBO$ (II призн. под.) $\Rightarrow KO_1 = \dfrac{2}{3}SO$.

3) $O$ – центр правильного треугольника $ABC$, значит $OB = R = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$.

Из $\Delta SOB$ по теореме Пифагора $SO = \sqrt{a^2 - \left(\dfrac{a}{\sqrt{3}}\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

$KO_1 = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{a\sqrt{6}}{3} = \dfrac{2a\sqrt{6}}{9}$.

4) $V_{KABC}=\frac{1}{3}S_{осн.}\cdot KO_1=\frac{1}{3}\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{2a\sqrt{6}}{9}=\frac{3a^3\sqrt{2}}{3\cdot2\cdot9}=\frac{a^3\sqrt{2}}{18}$ (куб. ед).

(*Ответ*: $\frac{a^3\sqrt{2}}{18}$ куб. ед. *Метод* – последовательное нахождение элементов.)

2. Через сторону нижнего основания куба проведена плоскость, делящая объем куба в отношении $m:n$, считая от нижнего основания. Найти угол между плоскостью сечения и плоскостью основания, если $m\le n$.

*Дано*: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб; $ABNM$ – сечение; $V_{AMDBNC}:V_{AA_1D_1MBB_1C_1N}=m:n$, $m\le n$ (рис. 5).

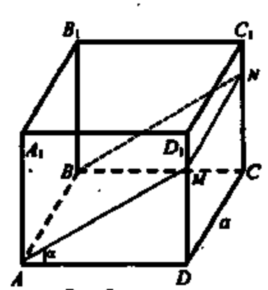



*Рис. 5*

*Найти*: $\angle((ABN);(ABC))$.

*Решение*:

1) Пусть $AB=CD=A_1B_1=a$, а $\angle((ABN);(ABC))=\angle MAD=\alpha$. $\Delta AMD: MD=a\mathrm{tg}\alpha$; $MD_1=a-a\mathrm{tg}\alpha$.

2) $AMDBNC$ – прямая треугольная призма с основаниями $\Delta AMD$ и $\Delta BNC$ и высотой $a$. $AA_1D_1MBB_1C_1N$ – прямая четырехугольная призма с основаниями $AA_1D_1M$ и $BB_1C_1N$ и высотой $a$. $V_1$ – объем треугольной призмы, $V_2$ – объем четырехугольной призмы. $\frac{V_1}{V_2}=\frac{m}{n}$ $m\le n$. $V_1=S_{AMD}\cdot a$, $V_2=S_{AA_1D_1M}\cdot a$,

3) $$\frac{V_1}{V_2}=\frac{S_{AMD}}{S_{AA_1D_1M}}=\frac{\frac{1}{2}AD\cdot DM}{\frac{AA_1+D_1M}{2}\cdot A_1D_1}=\frac{\frac{1}{2}a^2\mathrm{tg}\alpha}{\left(\frac{a+a-a\mathrm{ctg}\alpha}{2}\right)\cdot a}=\frac{a^2\mathrm{tg}\alpha}{a^2(2-\mathrm{tg}\alpha)}=$$

$=\frac{\mathrm{tg}\alpha}{2-\mathrm{tg}\alpha}=\frac{m}{n}$. Решив уравнение, получим $\mathrm{tg}\alpha=\frac{2m}{m+n}\Rightarrow\alpha=$ $=\mathrm{arctg}\frac{2m}{m+n}$.

(*Ответ*: $\frac{2m}{m+n}$. *Метод* – введение вспомогательного линейного аргумента, решение уравнения.)

3. Боковая поверхность правильной четырехугольной пирамиды равна $S$, а двугранный угол при боковом ребре равен 120°. Найдите объем пирамиды.

*Дано*: $ABCDL$ – правильная четырехугольная пирамида. $S_{бок.п.}=S$; $\angle((ALD);(CLD))=120°$ (рис. 6).

*Найти*: $V_{пир.}$

*Решение*:

1) Проведем $AK \perp LD$. $\Delta ADK = \Delta CDK$ (по I призн.) $\Rightarrow$ $CK \perp LD \Rightarrow$ $\Rightarrow LD \perp (AKC) \Rightarrow \angle AKC$ – линейный угол при боковом ребре. По условию $\angle AKC = 120° \Rightarrow$ $\Rightarrow \angle AKO = \angle CKO = 60°$.

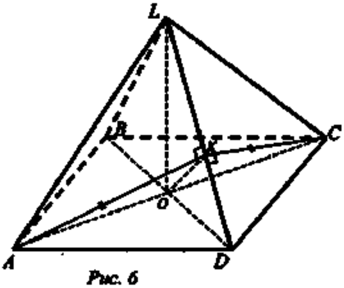


*Рис. 6*

2) $\Delta OLD$ – проекция $\Delta ALD$ на плоскость $(BLD)$, значит, по свойству проекции многоугольника $S_{OLD} =$ $= S_{ALD} \cdot \cos\angle AKO = \dfrac{1}{4}S \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{S}{8}$,

3) Пусть $AO = OD = b$. $\Delta AOK : OK = AO \cdot \mathrm{ctg}60° = \dfrac{b}{\sqrt{3}}$. $\Delta OKD : KD =$

$= \sqrt{OD^2 - OK^2} = \sqrt{b^2 - \dfrac{b^2}{3}} = \dfrac{b\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$. $\Delta OLD \sim \Delta KOD \Rightarrow \dfrac{S_{OLD}}{S_{KOD}} = K^2 = \dfrac{OD^2}{KD^2}$

$\Rightarrow S_{OLD} = \dfrac{OD^2}{KD^2} \cdot S_{KOD} = \dfrac{OD^2}{KD^2} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot KD \cdot OK = \dfrac{b^2}{2\sqrt{2}}$; Таким образом,

$S_{OLD} = \dfrac{S}{8} = \dfrac{b^2}{2\sqrt{2}} \Rightarrow b = \dfrac{\sqrt[4]{2S^2}}{2}$. $V_{LABCD} = 4V_{AOLD} = 4 \cdot \dfrac{1}{3} \cdot S_{OLD} \cdot AO =$

$= \dfrac{4}{3} \cdot \dfrac{\sqrt[4]{2S^2}}{2} \cdot \dfrac{S}{8} = \dfrac{S\sqrt[4]{2S^2}}{12}$.

(*Ответ*: $\dfrac{S\sqrt[4]{2S^2}}{12}$ куб.ед. *Метод* – разбиение тела на части, введение вспомогательной переменной, теорема о проекции многоугольника.)

4. Основанием наклонного параллелепипеда служит ромб со стороной $a$ и острым углом 30°. Диагональ одной боковой грани перпендикулярна плоскости основания, а боковое ребро составляет с плоскостью основания угол 60°. *Найти* объем параллелепипеда.

*Дано*: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – наклонный параллелепипед; $ABCD$ – ромб; $AB = a$; $\angle A = 30°$; $AD \perp (ABC)$; $\angle(AA_1; (ABC)) = 60°$ (рис. 7).

*Найти*: $V_{пар.}$

*Решение*: $AB = AD = a$; $\angle C = 30°$; $A_1D \perp (ABC) \Rightarrow \angle(AA_1; (ABC) = \angle A_1AD = 60°$. Проведем $A_1K \perp AB$, тогда по теореме о трех

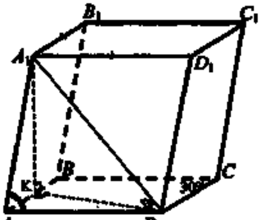


*Рис. 7*

перпендикулярах $DK \perp AB$ и $S_{ABCD} = a^2\sin A = \dfrac{a^2}{2}$. $\Delta AA_1D : A_1D = AD \cdot \mathrm{tg}60° =$

$= a\sqrt{3}$. $V = S_{ABCD} \cdot A_1D = \dfrac{a^2}{2} \cdot a\sqrt{3} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$ (куб.ед). (*Ответ*: $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$. *Метод* – последовательное вычисление величин.)

5. Пирамида *MABCD* задана координатами своих вершин: $M(-1; 2; 5)$; $A(1; -1; 2)$; $B(-2; 1; 2)$; $C(-1; 3; 2)$; $D(3; 1; 2)$. Найти объем пирамиды.

*Дано*: *MABCD* – пирамида; $M(-1; 2; 5)$; $A(1; -1; 2)$; $B(-2; 1; 2)$; $C(-1; 3; 2)$; $D(3; 1; 2)$.

*Найти*: $V_{пир.}$

1) Заметим, что аппликаты точек *A*, *B*, *C*, *D* равны между собой, т.е. $Z = 2$, значит основание пирамиды лежит в плоскости $Z = 2$. Т.к. аппликаты точки $M: Z = 5$, то расстояние от точки *M* до плоскости основания *ABCD* равно $5 - 2 = 3$, значит $H = 3$.

2) $\overrightarrow{AC}\{-2;4;0\}$; $\overrightarrow{BD}\{5; 0; 0\}$; $\left|\overrightarrow{AC}\right| = 2\sqrt{5}$; $\left|\overrightarrow{BD}\right| = 5$. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = -10$;

Пусть φ – угол между диагоналями основания, тогда $\cos\varphi = \dfrac{\left|\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}\right|}{\left|\overrightarrow{AC}\right| \cdot \left|\overrightarrow{BD}\right|} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$. $S_{осн.} = \dfrac{1}{2} AC \cdot BC \cdot \sin\varphi$; $\sin\varphi = \sqrt{1 - \dfrac{1}{5}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$;

$$S_{осн.} = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{5} \cdot 5 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = 10.$$

3) $V_п = \dfrac{1}{3} S_{осн.} \cdot H = \dfrac{1}{3} \cdot 10 \cdot 3 = 10$ (куб.ед.)

(*Ответ*: 10 куб.ед. *Метод* – координатно-векторный.)

**VI. Подведение итогов**

---

**Домашнее задание** (5 мин)

а) выставление оценок.

б) указание к домашнему заданию (тесты заданий на партах с начала урока).

в) два ученика готовят решение на листах ватмана для проверки на следующем уроке.

*Дома:*

***№ 1.*** Через точку, делящую ребро правильного тетраэдра в отношении 1 : 4, проведена плоскость, перпендикулярная этому ребру.

Найти отношение объемов полученных частей тетраэдра.

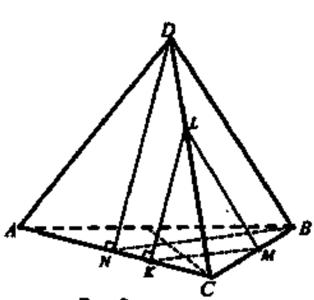



*Рис. 8*

*Дано*: *ABCD* – тетраэдр; $CK : KA = 1 : 4$; $AC \perp (KLM)$ (рис. 8).

*Найти*: $V_{KLMC} : V_{ADBKLM}$.

*Решение*: $CK : KA = 1 : 4$. $(LKM) \perp AC$. Пусть $CK = a$, тогда $AK = 4a$; $AC = 5a$. Пусть $N$ – середина $AC$. Тогда $DN \parallel KL$; $BN \parallel KM \Rightarrow (LKM) \parallel (DNB)$. Пирамиды $KLMC$ и $NDBC$ подобны, поэтому отношение их объемов равно кубу их соответствующих линейных размеров. Поэтому $V_{KLMC} : V_{NDBC} = KC^3 : NC^3 = a^3 : \left(\frac{5}{2}a\right)^3 = 8 : 125$, а $V_{NDBC} = \frac{1}{2} V_{ABCD} \Rightarrow V_{KLMC} : V_{ABCD} = 4 : 125$. Тогда $V_{KLMC} : V_{ADBKLM} = 4 : 121$. (*Ответ*: 4 : 121.)

**№ 2.** Основанием пирамиды служит ромб с острым углом 30°. Боковые грани наклонены к плоскости основания под углом 60°. Определить объем пирамиды, если радиус вписанного в ромб круга равен $r$.

*Дано*: $ABCDS$ – пирамида, $ABCD$ – ромб, $\angle A = 30°$. $\angle((SDC) : (ABC)) = 60°$. Все грани равнонаклонены к основанию $OK = r$ (рис. 9).

*Найти*: $V_{пир.}$

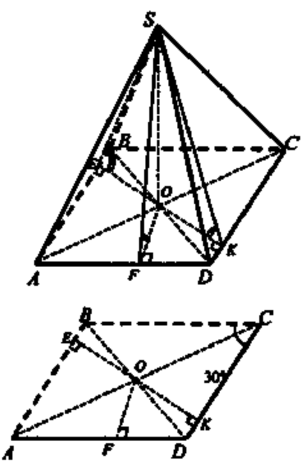


*Рис. 9*

1) $O$ – центр вписанной в ромб окружности, тогда $OE \perp AB$; $OF \perp AD$; $OK \perp CD$; $SO \perp (ABCD)$ (так как если все боковые грани наклонены к плоскости основания под одним углом, то проекцией вершины пирамиды служит центр окружности вписанной в основание).

2) $\angle SEO = \angle SFO = \angle SKO = 60°$ (по условию), $\Delta SEK : \angle ESK = 180° - 2 \cdot 60° = 60° \Rightarrow SE = SK = SK = 2r$. $S_{ABCD} = \frac{1}{2} AB \cdot AD \cdot \sin A$; пусть $AB = a$, тогда $S_{ABCD} = \frac{a^2}{2}$, с другой стороны $S_{ABCD} = AB \cdot EK = a \cdot 2r$.

Получим уравнение $\frac{a^2}{2} = 2ar$; $a = 4r$, а $S_{ABCD} = 8r^2$.

3) $\Delta ESO : SO = EO \cdot \mathrm{tg}60° = 4\sqrt{3}$. $V_{п.} = \frac{1}{3} S_{осн.} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 8r^2 \cdot r\sqrt{3} = \frac{8r^3\sqrt{3}}{3}$ куб. ед.

## *Основные формулы, используемые в геометрии*

**Площади поверхностей и объемов тел.**

**Призма.** 1. $S_{бок.} = P_{сеч.} \cdot AA_1$ ($P_{сеч.}$ – периметр сечения перпендикулярного боковому ребру. $AA_1$ – боковое ребро).

2. $S_{полн.} = S_{бок.} + 2S_{осн.}$

3. $V = S_{осн.} \cdot H$ ($H$ – высота призмы).

**Прямая призма.** 1. $S_{бок.} = P_{осн.} \cdot AA_1$ ($P_{осн.}$ – периметр основания, $AA_1$ – боковое ребро).

2. $S_{полн.} = S_{бок.} + 2S_{осн.}$

3. $V = S_{осн.} \cdot AA_1$ ($AA_1$ – боковое ребро (высота)).

**Прямоугольный параллелепипед.** 1. $S_{бок.} = P_{осн.} \cdot AA_1$ ($AA_1$ – соответствующее боковое ребро).

2. $S_{полн.} = S_{бок.} + 2S_{осн.} = 2(ab + ac + bc)$ ($a, b, c$ – ребра параллелепипеда).

3. $V = abc$.

Куб. 1. $S_{бок.} = 4a^2$ ($a$ – ребро куба).

2. $S_{полн.} = 6a^2$.

3. $V = a^3$.

**Правильная пирамида.** 1. $S_{бок.} = ph$ ($p$ – полупериметр основания, $h$ – апофема).

2. $S_{полн.} = S_{бок.} + S_{осн.}$

3. $V = \frac{1}{3} S_{осн.} \cdot H$ ($H$ – высота пирамиды)

**Правильная усеченная пирамида.** 1. $S_{бок.} = (p_1 + p_2)h$ ($p_1$ и $p_2$ – полупериметры оснований, $h$ – высота боковой грани).

2. $S_{полн.} = S_{бок.} + S_1 + S_2$ ($S_1$ и $S_2$ – площади оснований).

3. $V = \frac{1}{3} H (S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2)$ ($H$ – высота пирамиды. $S_1$ и $S_2$ – площади оснований).

**Цилиндр.** 1. $S_{бок.} = 2\pi RH$ ($R$ – радиус основания, $H$ – высота).

2. $S_{полн.} = S_{бок.} + 2S_{осн.} = 2\pi R (H + R)$.

3. $V = \pi R^2 H$.

**Конус.** 1. $S_{бок.} = \pi Rl$ ($R$ – радиус основания, $l$ – образующая).

2. $S_{полн.} = S_{бок.} + S_{осн.} = \pi R (l + R)$.

3. $V = \frac{1}{3} \pi R2H$ ($H$ – высота конуса).

**Усеченный конус.** 1. $S_{бок.} = \pi (R + r)\, l$ ($R$ и $r$ – радиусы оснований, $l$ – образующая).

2. $S_{полн.} = S_{бок.} + S_{осн.} = \pi (R + r)\, l + \pi R2 + \pi r^2$.

3. $V = \frac{1}{3} \pi H (R^2 + Rr + r^2)$.

**Шар.** 1. $S = 4\pi R^2$.

2. $V = \frac{4}{3} \pi R^3$ ($R$ – радиус шара).

**Шаровой сегмент.** 1. $S = 2\pi RH$ ($R$ – радиус шара, $H$ – высота сегмента).

2. $V = \pi H^2 (R - \frac{1}{3} H)$.

**Шаровой сектор.** $V = \frac{2}{3} \pi R^2 H$ ($R$ – радиус шара, $H$ – высота шарового сектора).

## Урок 64. Повторение по теме «Объемы тел»

*Цели урока:*

- рассмотреть задачи на комбинации тел и нахождение объемов тел вращения;
- совершенствовать навыки решения задач.

## Ход урока

**I. Организационный момент**

Сообщить тему урока, цели урока.

**II. Проверка домашнего задания**

Два человека отвечают по плакатам, вывешенным на доске.

**III. Актуализация знаний**

1. Повторение теории (для всех случаев заготовлены чертежи на доске):
   а) ГМТ, равноудаленных от двух данных (плоскость, перпендикулярная отрезку и проходящая через его середину);
   б) ГМТ, равноудаленных от параллельных плоскостей (плоскость, параллельная данным и проходящая на равном расстоянии от обеих);
   в) ГМТ, равноудаленных от граней двугранного угла (биссекторная плоскость);
   г) ГМТ, равноудаленных от точек окружности (прямая, перпендикулярная плоскости окружности и проходящая через центр окружности);
   д) ГМТ, равноудаленных от вершин многоугольника, вписанного в окружность (прямая, перпендикулярная плоскости многоугольника и проходящей через центр окружности);
   е) шар вписан в многогранник (поверхность шара касается граней многогранника);
   ж) шар описан около многогранника (поверхность шара проходит через все вершины многогранника);
   з) шар вписан в цилиндр (конус) (поверхность шара касается оснований и всех образующих);
   и) шар описан около цилиндра (конуса) (окружность оснований и вершина принадлежат поверхности шара;
   к) положение центра шара, вписанного в многогранник (точка пересечения биссекторных плоскостей всех двугранных углов многогранника; всегда внутри);
   л) положение центра шара, описанного около многогранника (точка пересечения плоскостей, перпендикулярных ко всем ребрам многогранника и проходящих через их середины, может лежать внутри, на поверхности, вне многогранника).

**IV. Решение задач**

Для каждого раздела учитель готовит плакаты с изображением взаимного расположения.

*1) Шар и пирамиды*

а) Если боковые грани пирамиды одинаково наклонены к основанию, то в такую пирамиду можно вписать шар. Центр шара лежит в точке пересечения высоты пирамиды с биссектрисой линейного угла любого двугранного при основании. В правильную пирамиду всегда можно вписать шар. Проекция шара на основание – круг, не вписанный в многоугольник основания, но лежащий в плоскости оси.

б) Около пирамиды можно описать шар тогда и только тогда, когда около ее основания можно описать окружность (треугольная пирамида, четырехугольная, у которой сумма противолежащих углов основания равна 180°).

Центр описанного шара лежит в точке пересечения прямой, перпендикулярной основанию и проходящей через центр окружности, описанной около основания, и плоскости, перпендикулярной любому боковому ребру и проведенной через середину этого ребра. Если боковые ребра пирамиды равны между собой (или равнонаклонны к плоскости основания), то около такой пирамиды можно описать шар. Центр шара в этом случае лежит в точке пересечения высоты пирамиды (или ее продолжения) с осью симметрии бокового ребра, лежащей в плоскости бокового ребра и высоты.

***Задача № 1.*** В основании пирамиды лежит ромб со стороной $a$ и острым углом $\alpha$. Каждый из двугранных углов при основании равен $\varphi$. Найти объем шара, вписанного в пирамиду.

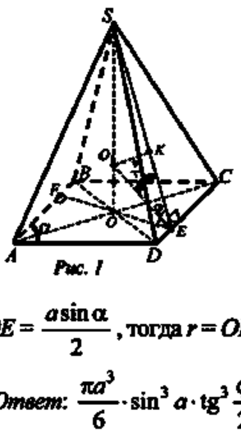


*Рис. 1*

*Дано*: $SABCD$ – пирамида; $ABCD$ – ромб; $AB = a$; $\angle A = \alpha$. $\angle((ABC); (SDC)) = \varphi$. Все боковые грани равнонаклонены к основанию (рис. 1).

*Найти*: $V_{шара}$, вписанного в пирамиду.

*Решение*: Центр вписанного шара лежит на оси пирамиды и отстоит на одно и то же расстояние, равное радиусу $r$ шара, от всех граней пирамиды. Проведем апофему пирамиды $SE$, тогда $r = O_1O = O_1K$. В ромбе, лежащем в основании пирамиды, высота $FE = h$, и $FE = a\sin\alpha$,

$$OE = \frac{a\sin\alpha}{2},\ \text{тогда}\ r = OE\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \frac{a}{2}\sin\alpha\cdot\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2},\ V_{ш.} = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{\pi a^3}{6}\cdot\sin^3 a\cdot\operatorname{tg}^3\frac{\varphi}{2}.$$

(*Ответ*: $\frac{\pi a^3}{6}\cdot\sin^3 a\cdot\operatorname{tg}^3\frac{\varphi}{2}$.

***Задача № 2.*** В шар радиуса $R$ вписана правильная четырехугольная пирамида. Определить объем этой пирамиды, если радиус окружности, описанной около ее основания, равен $r$.

*Дано*: $SABCD$ – правильная пирамида, вписанная в шар. $R$ – радиус шара; $r$ – радиус окружности описанной около $ABCD$ (рис. 2).

*Найти*: $V_{пир.}$

*Решение*: $CK = SK$; Проведем $KO_1 \perp SC$; $KO_1 \cap SO = \{O_1\}$ – центр описанного шара, значит $O_1S = O_1A = O_1D = O_1C = R$. Рассмотрим $\Delta O_1OD$ –

прямоугольный, по теореме Пифагора $O_1O = \sqrt{O_1D^2 - OD^2} = \sqrt{R^2 - r^2}$;

$SO = SO_1 + + O_1O = R + \sqrt{R^2 - r^2}$ – высота пирамиды. $\Delta AOD$ – прямоугольный; $AD^2 = AO^2 + OD^2 = 2r^2$. $S_{осн.} = S_{ABCD} = AD^2 = 2r^2$. $V_{пир.} = \frac{1}{3} S_{осн.} \cdot H = $

$= \frac{1}{3} \cdot 2r^2 \cdot (R + \sqrt{R^2 - r^2}) = \frac{2}{3} r^2 (R + \sqrt{R^2 - r^2})$. (*Ответ*: $\frac{2}{3} r^2 (R + \sqrt{R^2 - r^2})$.)

2) ***Шар и призма***

а) В призму можно вписать шар тогда и только тогда, когда в перпендикулярное сечение этой призмы можно вписать окружность, а высота призмы равна диаметру окружности, вписанной в это перпендикулярное сечение. Если призма прямая, то проекция шара на плоскость – круг, вписанный в многоугольник основания. Например, шар можно вписать в прямую треугольную призму, если $H = 2r$; в прямую четырехугольную призму у которой суммы противоположных сторон основания равны и $H = 2r$, где $H$ – высота призмы; $r$ – радиус шара.

б) Описать шар около призмы можно тогда и только тогда, когда призма прямая и около ее основания можно описать окружность. Многоугольники основания призмы вписаны в некоторое сечение шара не проходящее через его центр; вершины призмы лежат на поверхности шара.

***Задача № 3.*** В правильную треугольную призму вписан шар. Найти отношение объема шара к объему призмы.

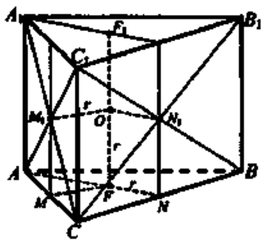



*Рис. 3*

*Дано*: $ABCA_1B_1C_1$ – правильная призма, шар вписан в призму (рис. 3).

*Найти*: $V_{ш.} : V_{пр.}$

*Решение*:

1) Так как вписанный шар касается всех граней призмы, то его центр равноудален от всех граней призмы, а его проекцией на плоскости оснований являются центры правильных треугольников – $F$ и $F_1$, причем $FM = FN = OF = OF_1 = r$.

2) $\Delta AMF$: Пусть $AB = AC = BC = a$; тогда $AM = a/2$; $\angle FAM = 60°/2 = 30$;

$$r = MF = AM \cdot \mathrm{tg} FAM = \frac{a}{2} \mathrm{tg} 30° = \frac{a}{2\sqrt{3}};$$

$$V_{ш.} = \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{4}{3} \pi \cdot \left(\frac{a}{2\sqrt{3}}\right)^3 = \frac{\pi a^3}{18\sqrt{3}} \text{ (куб. ед.)}.$$

3) $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A = \frac{1}{2} a \cdot a \cdot \sin 60° = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ (кв. ед.). $F_1F$ – высота

призмы; $FF_1 = 2r = 2\cdot\dfrac{a}{2\sqrt{3}} = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$; $V_{\text{пр.}} = S_{ABC}\cdot H = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot\dfrac{a}{\sqrt{3}} = \dfrac{a^3}{4}$.

4) $V_{\text{ш.}} : V_{\text{пр.}} = \dfrac{\pi a^3}{18\sqrt{3}}\cdot\dfrac{4}{a^3} = \dfrac{2\pi}{9\sqrt{3}}$.

(*Ответ*: $\dfrac{2\pi}{9\sqrt{3}}$.)

***3) Конус и призма***

а) Прямой круговой конус можно вписать в призму, если в многоугольник основания призмы можно вписать окружность, а прямая, проходящая через центр этой окружности и перпендикулярная к плоскости основания, пересекает верхнее основание призмы (эта прямая является осью симметрии конуса). Высота конуса равна высоте призмы.

б) Прямой круговой конус описан около призмы, если все вершины верхнего основания призмы лежат на боковой поверхности конуса, а нижнее основание призмы лежит в плоскости основания конуса $\Rightarrow$около основания призмы можно описать окружность; нижнее основание призмы не вписано в основание конуса.

***Задача № 4.*** Основанием прямой призмы служит равнобокая трапеция с острым углом $\alpha$. В призму вписан конус. Найти объемы призмы и конуса, если диаметр основания конуса равен $d$, а угол наклона образующей конуса к плоскости его основания равен $\beta$.

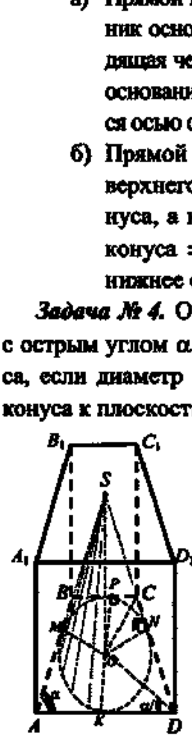



*Рис. 4*

*Дано*: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямая призма. $ABCD$ – трапеция; $AB = CD$; $\angle A = \alpha$; конус вписан в призму; $\angle SNO = \beta$, $KP = d$ (рис. 4).

***Найти***: $V_{\text{к.}}$; $V_{\text{пр.}}$

***Решение***:

1) $MO = PO = KO = NO = \dfrac{d}{2}$; $\quad \Delta SNO : SO = NO\cdot\operatorname{tg}SNO = \dfrac{d\operatorname{tg}\beta}{2}$ – высота конуса и призмы.

$\Delta KOD : KD = OK : \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{d\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}}{2}$. $\quad AD = 2KD = d\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$.

$\Delta POC : \angle PCO = 90^\circ - \dfrac{\alpha}{2}$; $PC = PO : \operatorname{tg}(90^\circ - \dfrac{\alpha}{2}) = \dfrac{d}{2\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}} = \dfrac{d\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}{2}$;

$BC = 2PC = d\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$.

2) $V_{\text{к}} = \dfrac{1}{3}\pi r^2 H = \dfrac{1}{3}\pi\cdot SO\cdot NO^2 = \dfrac{1}{3}\pi\cdot\dfrac{d\operatorname{tg}\beta}{2}\cdot\left(\dfrac{d}{2}\right)^2 = \dfrac{\pi d^3\operatorname{tg}\beta}{24}$ (куб. ед.).

$$V_{пр.} = S_{осн.} \cdot H = \frac{AD+BC}{2} \cdot PK \cdot SO = \frac{d\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} + d\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{2} \cdot d \cdot \frac{d\operatorname{tg}\beta}{2} =$$

$$= \frac{d^3\operatorname{tg}\beta}{4}\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right).$$

(*Ответ*: $V_{к.} = \frac{\pi d^3 \operatorname{tg}\beta}{24}$; $V_{пр.} = \frac{d^3\operatorname{tg}\beta}{4}\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right)$.)

***4) Пирамида и цилиндр***

а) В пирамиду можно вписать прямой круговой цилиндр, причем окружность одного из оснований цилиндра касается всех боковых граней пирамиды, а другое основание цилиндра лежит в плоскости основания пирамиды, но не является вписанным в многоугольник основания; если в многоугольник основания пирамиды можно вписать окружность.

б) Пирамида считается вписанной в цилиндр, если ее основание лежит в плоскости одного из оснований цилиндра и является многоугольником, вписанным в окружность основания цилиндра, а вершина пирамиды находится в плоскости другого основания цилиндра.

***Задача № 5.*** В правильную четырехугольную пирамиду с плоским углом $\alpha$ при вершине вписан цилиндр.

Найти объемы тел, если высота цилиндра в два раза меньше высоты пирамиды, а радиус его основания равен $r$.

*Дано*: $SABCD$ – правильная пирамида, цилиндр вписан в пирамиду. $SO = 2OO_1$, $ON = O_1N_1 = r$ (рис. 5).

*Найти*: $V_{пир.}$; $V_{цил.}$

*Решение*:

1) Центры оснований пирамиды и цилиндра совпадают – точка $O$. $\Delta SON_1 \sim \Delta SOE$ (по 2-м углам) $\Rightarrow \frac{O_1N_1}{OE} = \frac{SO_1}{SO} = \frac{1}{2} \Rightarrow OE = 2O_1N_1 =$ $= 2r \Rightarrow DC = 2OE = 4r$.

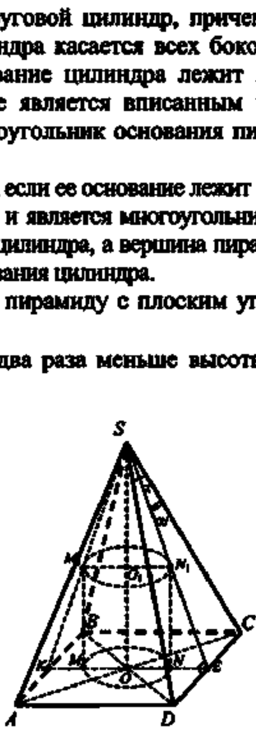



*Рис. 5*

2) $\Delta DSC$: так как пирамида правильная, то $SD = SC$, тогда $SE$ – медиана и биссектриса $\Rightarrow CE = \frac{1}{2}DC = \frac{1}{2} \cdot 4r = 2r$; $\angle CSE = \frac{\alpha}{2}$.

$SE = CE \cdot \operatorname{ctg} CSE = 2r \cdot \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$.

3) $\Delta SOE$: $SO = \sqrt{SE^2 - EO^2} = \sqrt{4r^2\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2} - 4r^2} = 2r\sqrt{\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2} - 1} =$

$$= 2r\sqrt{\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}}} = \frac{2r\sqrt{\cos\alpha}}{\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|}$$, но $\alpha$ – плоский угол в правильной

четырехугольной пирамиде, значит $4\alpha < 360° \Rightarrow \alpha < 90° \Rightarrow \frac{\alpha}{2}$ – острый $\Rightarrow |\sin\frac{\alpha}{2}| = \sin\frac{\alpha}{2}$. Таким образом, $SO = \frac{2r\sqrt{\cos\alpha}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$, тогда

$$O_1O = \frac{1}{2}SO = \frac{r\sqrt{\cos\alpha}}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

4) $S_{ABCD} = DC^2 = 16r^2$; $V_{\text{пир.}} = \frac{1}{3}S_{ABCD} \cdot SO$; $V_{\text{пир.}} = \frac{1}{3} \cdot 16r^2 \cdot \frac{2r\sqrt{\cos\alpha}}{\sin\frac{\alpha}{2}} =$

$$= \frac{32r^3\sqrt{\cos\alpha}}{3\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

5) $V_{\text{цил.}} = \pi \cdot ON2 \cdot OO_1 = \pi r^2 \cdot \frac{r\sqrt{\cos\alpha}}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{\pi r^3\sqrt{\cos\alpha}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$.

(*Ответ*: $\frac{32r^3\sqrt{\cos\alpha}}{3\sin\frac{\alpha}{2}}$; $\frac{\pi r^3\sqrt{\cos\alpha}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$.)

***5) Конус и шар***

а) В шар можно вписать конус. При этом вершина конуса и все точки его основания лежат на поверхности шара, а центр шара лежит на высоте конуса.

б) Шар можно вписать в конус, при этом каждая образующая конуса является касательной к поверхности шара и плоскость основания конуса касается поверхности шара.

Если провести осевое сечение конуса, то в сечении получим равнобедренный треугольник, в который вписано диаметральное сечение шара.

в) Шар можно вписать в усеченный конус тогда и только тогда, когда осевым сечением конуса служит равнобокая трапеция, в которую можно вписать окружность.

***Задача № 6.*** Определить объем усеченного конуса с образующей, равной $l$, описанного около шара радиуса $r$.

*Дано*: шар вписан в усеченный конус. $CD = l$; $OO_2 = OO_1 = OK = r$ (рис. 6).

*Найти*: $V_{\text{у.к.}}$

*Решение*:

1) Рассмотрим осевое сечение конуса – равнобокую трапецию $ABCD$. Окружность $(O; r)$ вписана в $ABCD$, значит $AB + CD = BC + AD$.


*Рис. 6*

Пусть $O_2C = R_2$; $O_1D = R_1$, тогда $2R_1 + 2R_2 = 2l \Rightarrow R_1 + R_2 = l$.

2) $\angle O_2CD + \angle O_1DC = 180°$, но $OC$ и $OD$ – биссектрисы этих углов, значит $\angle DCO + \angle CDO = 180°/2 = 90° \Rightarrow \angle COD = 90°$, т.е. $\Delta COD$ – прямоугольный. $OK$ – высота, опущенная на гипотенузу, поэтому $OK2 = CK \cdot KD$. По свойству касательных, проведенных к окружности из одной точки $CK = CO_2 = R_2$; $KD = O_1D = R_1$ и значит, $OK^2 = R_1 \cdot R_2$, т.е. $R_1 \cdot R_2 = r^2$.

3) $V_{\text{у.к.}} = \dfrac{1}{3}\pi H(R_1^2 + R_2^2 + R_1 \cdot R_2) = \dfrac{1}{3}\pi \cdot 2r \cdot ((R_1 + R_2)^2 - R_1 \cdot R_2) =$

$= \dfrac{1}{3}\pi \cdot 2r \cdot (l^2 - r^2) = \dfrac{2}{3}\pi r(l^2 - r^2)$.

(*Ответ*: $\dfrac{2}{3}\pi r(l^2 - r^2)$.)

**V. Подведение итогов**

*Вопросы*:

– Какие вопросы теории повторили на этом уроке?

– По каким формулам вычисляют объем шара, пирамиды, призмы, конуса, усеченного конуса, цилиндра?

Выставление оценок. В журнал выставляются оценки за домашнюю работу только учащимся, получившим неудовлетворительные оценки за работу на уроке.

---

**Домашнее задание**

Указания к домашнему заданию (все готовят решения на двойных листах и сдают к следующему уроку).

*Дома*:

*№ 1*. В правильной треугольной пирамиде высота равна 3, а объем равен $9\sqrt{3}$. Найти радиус сферы, описанной около пирамиды.

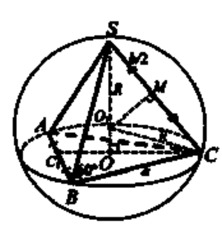



Рис. 7

*Дано*: правильная треугольная пирамида. $SABC$; $SO = 3$; $V = 9\sqrt{3}$ (куб.ед.) (рис. 7).

Сфера описана около пирамиды.

*Найти*: $O_1S = O_1C = R$.

*Решение*: Пусть $AB = BC = a$, тогда так как $V_{\text{пир.}} = \dfrac{1}{3}S_{\text{осн.}} \cdot SO$, а $S_{\text{осн.}} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$, получим $9\sqrt{3} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot 3 \Rightarrow a = BC = 6$. $O$ – центр основания призмы $\Rightarrow CO = \dfrac{2}{3}CC_1 = \dfrac{2}{3} \cdot a\sin 60° = \dfrac{2}{3} \cdot 6 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$. Точка $O_1$ лежит на пересечении прямой $SO$ и серединного перпендикуляра $MO_1$ к ребру $SC$, проведенному в плоскости $SOC$. Пусть $SC = b$, тогда $SC = \sqrt{SO^2 + OC^2} = \sqrt{3^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{21} = b$. $\Delta SOC \sim \Delta SMO_1$(по 2-м углам)

$$\Rightarrow \frac{SO_1}{SC} = \frac{SM}{SO} \Rightarrow SO_1 = \frac{SC \cdot SM}{SO} = \frac{b \cdot \frac{1}{2} b}{SO} = \frac{\sqrt{21} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{21}}{3} = \frac{7}{2}.$$ (*Ответ*: 3,5.)

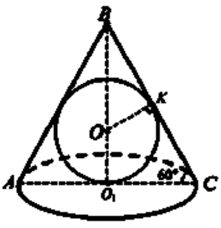


*Рис. 8*

**№ 2.** Найти отношение объема шара к объему описанного около него конуса с равносторонним осевым сечением.

*Дано*: Шар вписан в конус. $\Delta ABC$ – осевое сечение $AB = BC = AC$ (рис. 8).

*Найти*: $V_ш : V_к$.

*Решение*:

1) Окружность диаметрального сечения шара вписана в равносторонний треугольник $ABC$. Пусть $AB = BC = AC = a$, тогда $OK = OO_1 = r = \frac{a}{2\sqrt{3}}$ и

$$V_ш = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot \left(\frac{a}{2\sqrt{3}}\right)^3 = \frac{\pi a^3}{18\sqrt{3}}$$ (куб.ед.).

2) $\Delta ABC : BO_1$ – высота, биссектриса, медиана, поэтому $O_1C = \frac{\alpha}{2}$;

$BO_1 = BC\sin 60° = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. $V_к = \frac{1}{3}\pi \cdot O_1C2 \cdot BO_1 = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{a^2}{4} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} =$

$= \frac{\pi a^3\sqrt{3}}{24}$ (куб.ед.).

3) $V_ш : V_к = \frac{\pi a^3}{18\sqrt{3}} \cdot \frac{24}{\pi a^3\sqrt{3}} = \frac{4}{9}$. Интересно, что и отношение площадей поверхности такого конуса и шара равно 4 : 9.

(*Ответ*: $V_ш : V_к = 4 : 9$.)

## Урок 65. Повторение по теме «Многогранники»

*Цель урока:*

– систематизировать теоретические знания по теме «Многогранники»;
– совершенствовать навыки решения задач.

### Ход урока

**I. Организационный момент**

Сообщаем тему, формулируем цель урока.

**II. Актуализация знаний учащихся**

1. Повторение теоретических сведений с помощью таблицы.

Призма

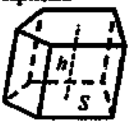



*Рис. 1*

$S_{бок.} = S_1 + S_2 + \ldots + S_n$, где $S_1$; $S_2$; $S_3$;… $S_n$ – площади боковых граней $S_{полн.} = S_{бок.} + 2S_{осн.}$
$V = Sh$

Прямая призма

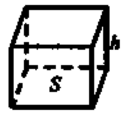



*Рис. 2*

$S_{бок.} = \frac{1}{2}P \cdot h$, где $P$ – периметр основания
$S_{полн.} = S_{бок.} + 2S_{осн.}$
$V = Sh$

Пирамида


*Рис. 3*

$S_{бок.} = S_1 + S_2 + \ldots + S_n$, где $S_1$; $S_2$; $S_3$;… $S_n$ – площадь боковых граней. Правильная пирамида.

$S_{бок.} = \frac{1}{2}P \cdot a$, где $P$ – периметр основания,

$S_{полн.} = S_{бок.} + S_{осн.}$

$V = \frac{1}{3}Sh.$

$a$ – апофема

Усеченная пирамида

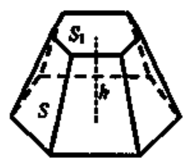



*Рис. 4*

$S_{бок.} = S_2 + S_3 + \ldots + S_n$, где $S_2$; $S_3$;… $S_n$ – площади боковых граней. Правильная усеченная пирамида.

$S_{бок.} = \frac{1}{2}(P_1 + P_2) \cdot a$,

где $P_1$; $P_2$ – периметры основания, $a$ – апофема. $S_{полн.} = S_{бок.} + S_1 + S$.

$V = \frac{1}{3}h(S + S_1 + \sqrt{S \cdot S_1})$

**III. Тест с последующей проверкой (см. приложение)**

*Ответы:*

*Вариант I:* б); в); а); в); а); а); б).

*Вариант II:* в); б); б); в); а); а).

I уровень решают № 1–4;

II уровень решают № 1–6;

III уровень решают №1–7.

Учащиеся решают задачи самостоятельно, записывая краткое решение в тетрадях.

Проверка правильности выполнения теста производится с помощью кодоскопа. Учащиеся в парах меняются тетрадями и проверяют друг друга.

За решение задач № 1–4 ставится отметка «3»; № 1–6 – «4»; № 1–7 – «5».

**IV. Решение задач по готовым чертежам**

Учащиеся решают задачи самостоятельно, записывая кратко решение в тетрадях, затем один из учащихся выходит к доске и рассказывает решение задачи.

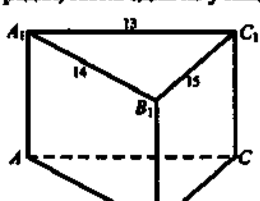



*Рис. 5*

Остальные проверяют правильность своего решения.

*№ 1. Дано*: $S_{полн.} = 378$; $A_1B_1 = 14$; $B_1C_1 = 15$; $A_1C_1 = 13$ (рис. 5).

*Найти*: $AA_1$, $S_{полн.}$, $S_{бок.}$, $V$.

*Решение*: $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$; $S_{\Delta A_1B_1C_1} =$

$= \sqrt{(p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} =$

$= 7 \cdot 3 \cdot 4 = 84$; $2S_{осн.} = 84 \cdot 2 = 168$. $S_{бок.} = 378 - 168 = 210$. $S_{бок.} = (15 + 14 + 13) \cdot$ $\cdot AA_1 = 42AA_1$; $42AA_1 = 210$; $AA_1 = 5$. $V = 84 \cdot 5 = 420$. (*Ответ*: 5; 378; 210; 420.)

*№ 2. Дано*: $A_2A_4' = 12$; $\angle A_4A_2A_4' = 30°$. $A_1A_2A_3A_4A_1'A_2'A_3'A_4'$ – правильная призма (рис. 6).

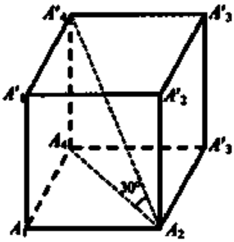


*Рис. 6*

*Найти*: $S_{бок.}$; $S_{полн.}$; $V$.

*Решение*: $A_4A_4' = 12 \cdot \sin 30° = 6$; $A_4A_2 = 12 \cdot \cos 30° = \frac{12 \cdot \sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$; $A_1A_2 = A_1A_4$; $2A_1A_2{}^2 = 108$; $A_1A_2{}^2 = 54$; $A_1A_2 = 3\sqrt{6}$. $S_{бок.} = 4 \cdot 3\sqrt{6} \cdot 6 = 72\sqrt{6}$; $S_{полн.} = 72\sqrt{6} + 108 = 36 \cdot (3 + 2\sqrt{6})$. $V = 54 \cdot 6 = 324$.

(*Ответ*: $72\sqrt{6}$; $36 \cdot (3 + 2\sqrt{6})$; 324.)

*№ 3. Дано*: $SO = 4$ – высота пирамиды. $ABCD$ – прямоугольник, $AD = BC = 6$; $AB = DC = 8$ (рис. 7).

*Найти*: $S_{бок.}$; $S_{полн.}$; $V$.

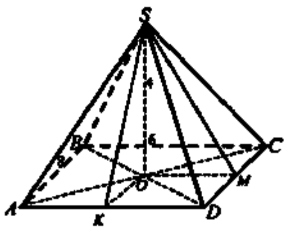


*Рис. 7*

*Решение*: $S_{\Delta DSC} = \frac{1}{2} DC \cdot SM$; $SM = \sqrt{SO^2 + OM^2}$; $AC = BD = \sqrt{64 + 36} = 10$; $AO = OD = 5$; $OM = \frac{1}{2} AD = \frac{6}{2} = 3$. $SM = \sqrt{16 + 9} = 5$. $S_{\Delta DSC} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 8 = 20$; $S_{\Delta ABS} = 20$; $OK = \frac{1}{2} DC$ (средняя линия $\Delta ADC$). $OK = 4$. $SK = \sqrt{16 + 16} = 4\sqrt{2}$;

$S_{\Delta ADS} = \frac{1}{2} 6 \cdot 4\sqrt{2} = 12\sqrt{2}$; $S_{\Delta BCS} = 12\sqrt{2}$.

$S_{бок.} = 2 \cdot 12\sqrt{2} + 2 \cdot 20 = 24\sqrt{2} + 40 = 8\,(3\sqrt{2} + 5)$; $S_{осн.} = 6 \cdot 8 = 48$; $S_{полн.} = S_{бок.} + S_{осн.} = 24\sqrt{2} + 40 + 48 = 24\sqrt{2} + 88 = 8(11 + 3\sqrt{2})$.

$V = \frac{1}{3} S_{осн.} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 48 \cdot 4 = 64$. (*Ответ*: $8(3\sqrt{2} + 5)$; $8(11 + 3\sqrt{2})$; 64.)

***Самостоятельная работа*** (см. приложение)

*Ответы:* I уровень: $\frac{a^3}{3}\operatorname{tg}\alpha$; II уровень $a^3$; III уровень $2a^3$.

***Решение самостоятельной работы***

***I уровень***

*Дано*: $SABCD$ – пирамида. $AB = BC = DC = AD = a$. $SB \perp$ пл. $ABCD$ (рис. 8).

$SP = PC$. $\angle POM = \alpha$.

*Найти*: $V$.

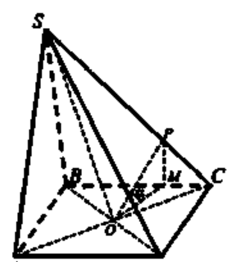


*Рис. 8*

*Решение*: Проведем $OM \parallel AB$; $OM = \frac{a}{2}$; $PM$ из $\Delta OPM$. $PM = OM \operatorname{tg}\alpha$. $MP$ – средняя линия в $\Delta SBC$.

$SB = 2 \cdot \frac{a}{2}\operatorname{tg}\alpha = a \cdot \operatorname{tg}\alpha$. $V = \frac{1}{3}S \cdot h$. $S = a^2$; $V = = \frac{1}{3}a^2 \cdot a\operatorname{tg}\alpha = \frac{a^3}{3}\operatorname{tg}\alpha$.

**На ребрах $AD$, $CC_1$ и $A_1B_1$ правильной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взяты соответственно точки $P$, $Q$, $R$ – середины этих ребер. *Найдите* объем призмы, если $AD = a$ и о треугольнике $PQR$ известно, что он:**

***II уровень*** – равносторонний.

***III уровень*** – прямоугольный.

*Дано*: правильная призма. $A_1R = RB_1$; $C_1Q = QC$; $AP = PD$. $AB = BC = CD = AD = a$; 1) $RP = PQ = RQ$. 2) $\Delta RQP$ – прямоугольный (рис. 9).

*Найти*: $V$.

*Решение*:

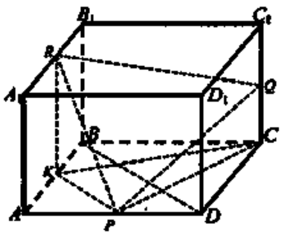


*Рис. 9*

1) В $\Delta ABD$ $PK$ – средняя линия.

$BD = a\sqrt{2}$; $PK = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. $RK = x$;

$RP^2 = PK^2 + x^2 = \frac{a^2}{2} + x^2$ (Из $\Delta KRP$.).

$PC^2 = PD^2 + DC^2 = \frac{a^2}{4} + a^2 = \frac{5a^2}{4}$ (Из $\Delta PCD$). $QC = \frac{RK}{2} = \frac{x}{2}$;

$PQ^2 = PC^2 + QC^2 = \frac{5a^2}{4} + \frac{x^2}{4}$; $PQ = RP$. $\frac{a^2}{2} + x^2 = \frac{5a^2}{4} + \frac{x^2}{4}$;

$\frac{3}{4}x^2 = \frac{3}{4}a^2$; $x = RK = a$. $S = a^2$. $V = S \cdot RK = a^2 \cdot a = a^3$.

2) $PQ = RQ$, так проекции $KC = PC = \frac{a\sqrt{5}}{2}$. $\Delta RQP$ – равнобедренный прямоугольный. $\angle RQP = 90°$. $PQ^2 = RQ^2 = \frac{5a^2}{4} + \left(\frac{RK}{2}\right)^2$; $RP^2$ из $\Delta PRQ$. $RP^2 = 2\left(\frac{5a^2}{4} + \left(\frac{RK}{2}\right)^2\right)$. $BD = a\sqrt{2}$ $KP = \frac{a\sqrt{2}}{2}$; $RK^2 =$

$= 2\left(\frac{5a^2}{4} + \left(\frac{RK}{2}\right)^2\right) - \frac{a^2}{2} = \frac{5a^2}{2} + \frac{RK^2}{2} - \frac{a^2}{2}$;

$RK^2 = \frac{5a^2}{2} + \frac{RK^2}{2} - \frac{a^2}{R}$; $\frac{RK^2}{2} = \frac{4a^2}{2}$; $RK^2 = 4a^2$; $RK = 2a$. $S_{осн.} = a^2$.

$V = S \cdot h = a^2 \cdot 2a = 2a^3$.

**V. Подведение итогов**

*Вопросы:*

– Какие теоретические вопросы мы повторили?

- По каким формулам вычисляют площади боковой и полной поверхности призмы, ее объем?
- По каким формулам вычисляют площади боковой и полной поверхности пирамиды, усеченной пирамиды, их объем?

**Домашнее задание**

Тесты. Варианты I и II (см. приложение).

I уровень – решают № 1–5.

II уровень – решают № 1–7.

*Ответы:*

***Вариант I:*** а); в); б); г); в); г); а).

***Вариант II:*** б); в); в); б); б); а); в).

## Урок 66. Повторение по теме: «Тела вращения»

*Цели урока:*

- Систематизировать теоретические знания по теме «Тема вращения»;
- Совершенствовать навыки решения задач.

## Ход урока

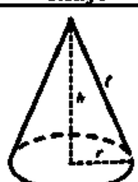
**I. Организационный момент**

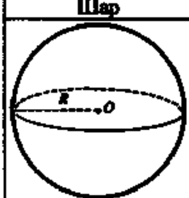
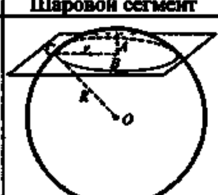
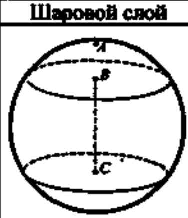
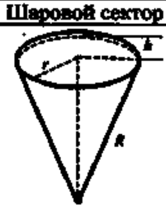
Сообщаем тему, формулируем цель урока.

Проверка домашнего задания через кодоскоп (взаимопроверка).

**II. Актуализация знаний учащихся**

Повторение теоретических сведений с помощью таблицы.

| Цилиндр | Конус | Усеченный конус |
|---|---|---|
|  |  |  |
| $S_{бок.} = 2\pi rh$<br>$S_{полн.} = 2\pi r(r + h)$<br>$V = \pi r^2 h$ | $S_{бок.} = \pi r\ell$<br>$S_{пол.} = \pi r(\ell + r)$<br>$V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h$ | $S_{бок.} = \pi(r + r_1)\ell$<br>$S_{полн.} = \pi r(\ell + r) + \pi r_1(\ell + r_1)$<br>$V = \dfrac{1}{3} h(S + S_1 + \sqrt{S \cdot S_1})$, где $S$ и $S_1$ – площади оснований |

| Шар | Шаровой сегмент | Шаровой слой | Шаровой сектор |
|---|---|---|---|
|  |  |  |  |

| | | | |
|---|---|---|---|
| $S = 4\pi R^2$<br>$V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$ | $AB = h$; $CB = r$;<br>$OC = R$.<br>$S_{бок.} = 2\pi Rh =$<br>$= \pi(r^2 + h^2)$.<br>$V = \pi h^2\left(R - \dfrac{1}{3}h\right) =$<br>$= \dfrac{1}{6}\pi h(h^2 + 3r^2)$ | $S_{бок} = 2\pi Rh$<br>$V = \dfrac{1}{6}\pi h^3 +$<br>$+ \dfrac{1}{2}\pi\left(r_1^2 + r_2^2\right) h$ | $S = S_{шар.сегм.} + S_{кон.}$<br>$V = \dfrac{2}{3}\pi R^2 h$, где $h$ – высота сегмента, содержащегося в секторе. |

**III. Тест с последующей проверкой по кодоскопу** (см. приложение)

*Ответы:*

Вариант I: а); б); в); г); а); в); а);

Вариант II: в); в); б); а); б); в); в).

I уровень №1–4;

II уровень № 1–6;

III уровень №1–7.

**IV. Решение задач по готовым чертежам**

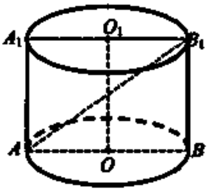



*Рис. 1*

Осевое сечение цилиндра – квадрат, диагональ которого равна 20 см. Найдите высоту цилиндра, площадь основания, площадь боковой поверхности (рис. 1).

*Решение*: $AA_1B_1B$ – квадрат. $AB = BB_1 = A_1B_1 = AA_1$; $AB_1 = 20$ см. $AB_1^2 = AB^2 + BB_1^2$; $\sqrt{2}AB = \sqrt{AB_1^2} = \sqrt{400}$; $A_1B_1 = AB = 10\sqrt{2}$ см. $OB = 5\sqrt{2}$ см; $S_{осн.} = \pi r^2 = \pi(5\sqrt{2}\,)^2 = 50\pi$ (см²). $\ell = 2\pi$. $OB = 2\pi$. $5\sqrt{2} = 10\sqrt{2}$ (см). $OO_1 = BB_1 = 10\sqrt{2}$ см. $S_{бок.} = 2\pi rh = 2\pi.\ OB \cdot BB_1 = 2\pi \cdot 5\sqrt{2} \cdot 10\sqrt{2} = 200\pi$ (см²).

(*Ответ*: $10\sqrt{2}$ см²; $50\pi$ см²; $200\pi$ см².)

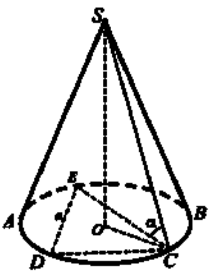



*Рис. 2*

2) *Дано*: ΔCDE – правильный. SO – высота конуса (рис. 2).

*Найти:* объем и площадь боковой поверхности конуса.

*Указание*: $OC = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. Из ΔECS: $SC = \dfrac{a}{2\cos\alpha}$. Из Δ$SOC$:

$$SO = \sqrt{\frac{a^2}{4\cos^2\alpha} - \frac{a^2}{3}} = \frac{a}{2\cos\alpha}\sqrt{\frac{3 - 4\cos 2\alpha}{3}}.$$

(*Ответ*: $\dfrac{\pi a^3\sqrt{3 - 4\cos^2\alpha}}{18\sqrt{3}\cos\alpha}$; $\dfrac{\pi a^2\sqrt{3}}{6\cos\alpha}$.)

3) $O$ и $O_1$ – центры оснований усеченного конуса. Найти объем и площадь боковой поверхности конуса (рис. 3).

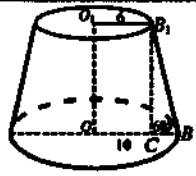


*Рис. 4*

*Указание*: проведем $B_1C \perp OB$. $CB = 4$ см. Из $\Delta B_1CB$: $B_1C = 4\sqrt{3}$ см; $BB_1 = 8$ см. (*Ответ*: $\frac{784\sqrt{3}\pi}{3}$; $128\pi$.)

4) $O$ – центр шара, $O_1$ – центр круга – сечения шара плоскостью. $\alpha = 60°$ (рис. 4).

*Найти*: площадь сечения шара плоскостью, объем и площадь поверхности шара.

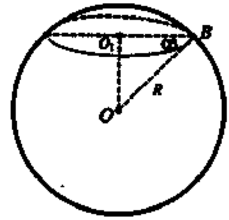


*Рис. 4*

*Решение*: $S_{сеч.} = \pi r^2 = \pi - 62 = 36\pi$;

$$R = \frac{O_1B}{\cos\alpha} = \frac{6}{\cos 60°} = \frac{6 \cdot 2}{\sqrt{3}} = \frac{12\sqrt{3}}{3} = 4\sqrt{3}.$$

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 64 \cdot 3\sqrt{3} = 256\pi\sqrt{3}.$$

$$S_{шара} = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot 48 = 192\pi.$$

(*Ответ*: $S_{сеч.} = 36\pi$; $V = 256\pi\sqrt{3}$; $S_{шара} = 192\pi$.)

## V. Самостоятельная работа

**№ 1.** Радиусы окружностей, являющихся сечениями сферы двумя параллельными плоскостями, равны 3 см и 4 см, а расстояние между этими плоскостями равно 7 см. Найдите площадь сферы.

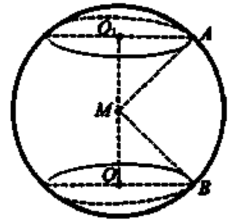


*Рис. 5*

*Дано*: $O_1A = 3$ см; $OB = 4$ см; $OO_1 = 7$ см (рис. 5).

*Найти*: $S_{сферы}$.

*Решение*: $OM = x$.

Из $\left.\begin{array}{ll} \text{Из } \Delta MO_1A & R^2 = (7-x)^2 + 9 \\ \text{Из } \Delta MOB & R^2 = 16 + x^2 \end{array}\right\}$ по теореме Пифагора. $(7-x)^2 + 9 = 16 + x^2$; $49 - 14x + x^2 + 9 = 16 + x^2$; $14x = 42$; $x = 3$; $R^2 = 16 + 91$; $R = 5$. $S_{сферы} = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot 25 = 100\pi$ см$^2$.

**№ 2.** Квадрат со стороной $a$ вращается вокруг прямой, проходящей через его сторону. Найдите: I уровень – площадь осевого сечения, полученного цилиндра; II уровень – площадь боковой поверхности этого цилиндра; III уровень – площадь полной поверхности полученного цилиндра.

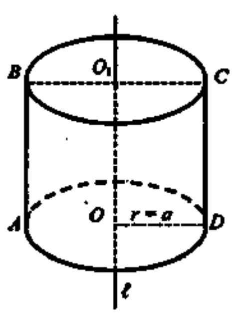


*Рис. 6*

*Дано*: $OO_1 = O_1C = CD = OD = a$ (рис. 6).

*Найти*: $S_{бок.}$, $S_{полн.}$, $S_{сеч.}$

*Решение*: $h = a$; $r = a$; $AD = 2OD = 2a$; $S_{ABCD} = 2a \cdot a = 2a^2$. (*Ответ*: $2a^2$.)

$S_{бок.} = 2\pi rh = 2\pi \cdot a \cdot a = 2\pi a^2$. (*Ответ*: $2\pi a^2$.)

$S_{полн.} = 2\pi r(r + h) = 2\pi a \cdot 2a = 4a^2\pi$.

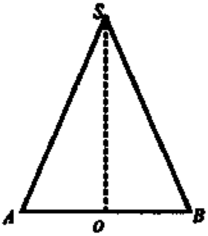


*Рис. 7*

*№ 3.* Длина образующей конуса $2\sqrt{3}$, а угол при вершине осевого сечения конуса равен 120° (рис. 7).

*Найдите*: I уровень – $S_{осн.}$; II уровень – $S_{бок.}$; III уровень – $S_{полн.}$

*Дано*: $\angle ASB = 120°$; $AS = 2\sqrt{3}$ см (рис. 7).

*Найти*: 1) $S_{осн.}$; 2) $S_{бок.}$; 3) $S_{полн.}$

*Решение*: $SO \perp AB$; $AO = OB$; $\Delta AOS$; $\angle ASB = \angle OSB = 60°$. $SO = AS \cdot \cos 60° = 2\sqrt{3}\frac{1}{2} = \sqrt{3}$ (см);

$AO = 2\sqrt{3}\sin 60° = 2\sqrt{3}\frac{\sqrt{3}}{2} = 3$ (см). $S_{осн.} = \pi r^2 = \pi \cdot 9 = 9\pi$ (см²); $S_{бок.} = \pi r\ell = \pi \cdot 3 \cdot 2\sqrt{3} = 2 \cdot 3\sqrt{3}\,\pi = 6\sqrt{3}\,\pi$ (см²); $S_{полн.} = \pi r(\ell + r) = \pi \cdot 3(2\sqrt{3} + 3) = 3\pi(2\sqrt{3} + 3)$ см². (*Ответ*: $9\pi$ см²; $6\sqrt{3}\,\pi$ см²; $3\pi(2\sqrt{3} + 3)$ см².)

*№ 4.* Отрезок $AB$ – хорда основания конуса, которая удалена от оси на 3 см. $MO$ – высота конуса, причем $MO = 6\sqrt{2}$ см, где $M$ – вершина конуса. Найдите расстояние от точки $O$ до плоскости, проходящей через точки $A$, $B$ и $M$.

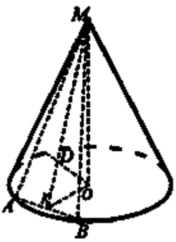


*Рис. 8*

*Дано*: $AB$ – хорда, $OK = 3$ см; $MO$ – высота конуса; $MO = 6\sqrt{2}$ см (рис. 8).

*Найти*: $OD$.

*Решение*: $\Delta KMO$; $OM \perp OK$. По теореме Пифагора $MK = \sqrt{72 + 9} = 9$ (см); $OD^2 = KD \cdot DM$; $KO^2 = MK \cdot KD$; $DM = 9 - KD$; $OD^2 = KD(9 - KD)$; $KO^2 = 9 \cdot KD$; $9 = 9KD$; $KD = 1$ см; $DM = 9 - 1 = 8$ (см); $OD = \sqrt{1 \cdot 8} = 2\sqrt{2}$ (см). (*Ответ*: $2\sqrt{2}$ см.)

---

**Домашнее задание**

Тест в 4-х вариантах (см. приложение)

*Ответы:*

Вариант I: г); б); а); г); а); в); а).

Вариант II: в); б); в); в); б); в); б).

Вариант III: в); а); в); а); а); б); в).

Вариант IV: а); б); в); б); б); а); а).

I уровень № 1–4; II уровень № 1–7.

## Урок 67. Повторение по теме: «Комбинации с описанными сферами»

*Цели урока:*

- систематизировать теоретические знания о комбинациях тел;
- научить учащихся решать задачи на комбинации с описанными телами.

### Ход урока

**I. Организационный момент**

**II. Актуализация знаний учащихся**

Проверка домашнего задания. Провести взаимопроверку теста (ответы теста записать на доске).

| № варианта | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | г | б | а | г | а | в | а |
| 2 | в | б | в | в | б | в | б |
| 3 | в | а | в | а | а | б | в |
| 4 | а | б | в | б | б | а | а |

**III. Решение задач на готовых чертежах**

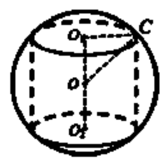


*Рис. 1*

*№ 1. Дано*: $\angle O_1CO = 45°$; $O_1C = 3\sqrt{2}$ (рис. 1).

*Найти*: $V_{шара}$

*Ответ*: $288\pi$

*№ 2. Дано*: $KO = 6\sqrt{3}$, $\angle KBO = 60°$ (рис. 2).

*Найти*: $V_{шара}$

*Ответ*: $288\pi$

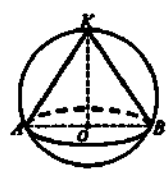


*Рис. 2*

*№ 3.* Дано: $KABCD$ – правильная пирамида, $AC = AK = CK$, $OC = 2\sqrt{3}$ (рис. 3).

*Найти*: $V_{пирамиды}$.

*Ответ*: $6\sqrt{3}$.

Пока учащиеся решают задачи на готовых чертежах, можно провести индивидуальную работу по карточкам (см. приложение).

*Ответы:*

I уровень: $\dfrac{3R\sqrt{12H^2+3R^2}}{4}$; $3R\sqrt{3}\sqrt{H^2+R^2}$.

II уровень: $2H^2\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}\sqrt{1+\dfrac{1}{2}\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}$; $4l^2\cos\alpha$.

III уровень: $\dfrac{21R^3}{16}$; $\dfrac{\pi S\sqrt{2S\sin 2\alpha}}{3\cos^3\alpha\sin^2 2\alpha}$.

***Решения:***

**Карточка 1**

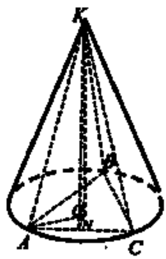


*Рис. 4*

*Дано*: В конус списана пирамида, $AB = BC = AC$, $AO = R$, $OK = H$ (рис. 4).

*Найти*: $S_{бок.KABC}$.

*Решение*: $AC = R\sqrt{3}$, $AN = NC = \frac{R\sqrt{3}}{2}$. По теореме Пифагора $ON = \sqrt{OA^2 + AN^2}$, $ON = \sqrt{R^2 - \frac{3R^2}{4}} = \frac{R}{2}$. Из $\Delta KON$ по теореме Пифагора $KN = \sqrt{KO^2 + ON^2}$, $KN = \sqrt{H^2 + \frac{R^2}{4}} = \sqrt{\frac{4H^2 + R^2}{4}} = \sqrt{\frac{4H^2 + R^2}{2}}$. $S_{бокKABC} = \frac{1}{2} P_{ABC} \cdot KN$, $S_{бок.} = \frac{1}{2} 3a \sqrt{\frac{4H^2 + R^2}{2}}$; $S_{бок} = \frac{3a\sqrt{4H^2 + R^2}}{4}$, где $a = R\sqrt{3}$, тогда $S_{бок.} = \frac{3R\sqrt{3}\sqrt{4H^2 + R^2}}{4}$ или $S_{бок.} = \frac{3R\sqrt{12H^2 + 3R^2}}{4}$.

(*Ответ*: $\frac{3R\sqrt{12H^2 + 3R^2}}{4}$.)

**Карточка 2**

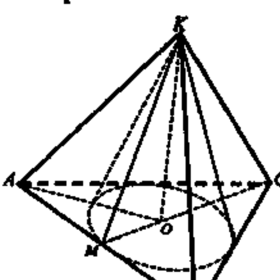


*Рис. 5*

*Дано*: Около конуса описана пирамида $AB = BC = AC$, $OM = R$, $KO = H$ (рис. 5).

*Найти*: $S_{бок.KABC}$.

*Решение*: Из $\Delta KOM$ по теореме Пифагора $KM = \sqrt{OK^2 + OM^2}$, $KM = \sqrt{H^2 + R^2}$, AO – биссектриса $\angle CAB$, тогда $\angle OAB = 30°$ $AO = 2MO$, $AO = 2R$ (катет, лежащий напротив угла в 30° равен половине гипотенузы). Из $\Delta AOM$ по теореме Пифагора $AM = \sqrt{AO^2 + OM^2} = \sqrt{4R^2 - R^2} = R\sqrt{3}$, тогда $AB = 2R\sqrt{3}$. $S_{бокKABC} = \frac{1}{2}(AB + BC + AC) \cdot KM$, $S_{бок.KABC} = \frac{1}{2} 6R\sqrt{3} \cdot \sqrt{H^2 + R^2} = 3R\sqrt{3}\sqrt{H^2 + R^2}$ или $S_{бок.KABC} = 3R\sqrt{3H^2 + 3R^2}$. (*Ответ*: $3R\sqrt{3H^2 + 3R^2}$.)

**Карточка 3**

*Дано*: пирамида вписана в конус, $OK = H$, $\angle AKC = \alpha$, $AB = BC = CD = AD$ (рис. 6).

*Найти*: $S_{бок.KABCD}$.

*Решение*: Так как $\angle AKC = \alpha$, то $\angle AKO = \angle CKO = \frac{\alpha}{2}$. По определению тангенса угла в $\Delta AOK$ $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{AO}{OK}$, $AO = OK\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, $AO = H\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. $AO = OC$ по свойству диагоналей квадрата, $AC = 2H\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. $\Delta ACD$ равнобедренный, прямоугольный, по теореме Пифагора $AC^2 = 2AD^2$, $AD = \frac{2H\operatorname{tg}\alpha/2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}H\operatorname{tg}\alpha/2$; $OM$ – средняя линия $\Delta ADC$, поэтому $OM = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,H\operatorname{tg}\alpha/2 = \frac{\sqrt{2}}{2}H\operatorname{tg}\alpha/2$. По теореме Пифагора из $\Delta OKM$ $KM = \sqrt{KO^2 + OM^2}$. $KM = \sqrt{H^2 + \frac{1}{2}H^2\operatorname{tg}^2\alpha/2} = H\sqrt{1+\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2\alpha/2}$.

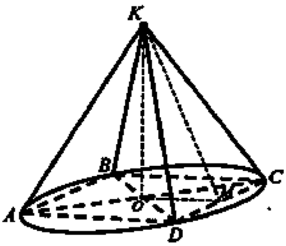


*Рис. 6*

$S_{бок.} = \frac{1}{2}(AB + BC + CD + AD)\cdot KM$, $S_{бок.} = \frac{1}{2}4\sqrt{2}\,H\operatorname{tg}\alpha/2\cdot H\sqrt{1+\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2\alpha/2} =$
$= \sqrt{2}H^2\operatorname{tg}\alpha/2\sqrt{1+\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2\alpha/2}$. (*Ответ*: $\sqrt{2}H^2\operatorname{tg}\alpha/2\sqrt{1+\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2\alpha/2}$.)

**Карточка 4**

*Дано*: конус вписан в пирамиду $AB = BC = CD = AD$, $KM = \ell$, $\angle KMO = \alpha$ (рис. 7).

*Найти*: $S_{бок.KABCD.}$

*Решение*: По определению $\sin\alpha = \frac{KO}{KM}$, $KO = KM\cdot\sin\alpha = \ell\sin\alpha$; $\cos\alpha = \frac{OM}{KM}$, $OM = KM\cdot\cos\alpha = \ell\cos\alpha$. $OM$ – средняя линия $\Delta ACD$, поэтому $AD = 2OM$, $AD = 2\ell\cos\alpha$.

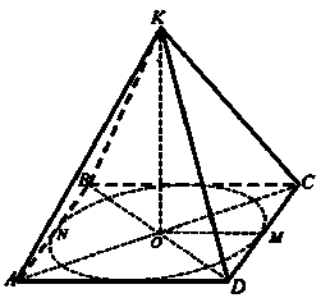


*Рис. 7*

$S_{бок.KABCD.} = \frac{1}{2}(AB + BC + CD + DA)\cdot KM$.

$S_{бок.KABCD.} = \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 2\ell\cos\alpha\cdot\ell = = 4\ell^2\cos\alpha$.

(*Ответ*: $4\ell^2\cos\alpha$.)

**Карточка 5**

*Дано*: В шар вписана правильная шестиугольная усеченная пирамида $O\in(ABC)$; $AO = OA_1 = R$; $\angle A_1AO = \alpha$ (рис. 8).

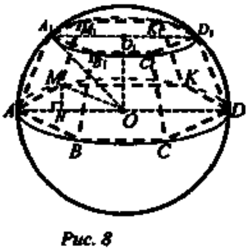


*Рис. 8*

*Найти*: $V_{пирам.}$

*Решение*: Так как радиус описанной окружности около правильного шестиугольника равен стороне ($AO = OM = AM = R$), то $\angle MAN = 60°$. В $\Delta AMN$: $\angle AMN = 30°$, следовательно, $AN = \frac{R}{2}$, тогда по теореме Пифагора

$MN = \sqrt{AM^2 - AN^2}$, $MN = \sqrt{R^2 - \frac{R^2}{4}} = \frac{R\sqrt{3}}{2}$, $S = S_{ABCDKM} = 2S_{ADKM} =$

$= 2\frac{AD + MK}{2}MN$, $S = (2R + R)\cdot\frac{R\sqrt{3}}{2} = \frac{3R^2\sqrt{3}}{2}$. $\angle A_1OO_1 = 30°$, тогда

$A_1O_1 = \frac{R}{2}$. Аналогично найдем $S_1 = S_{A_1B_1C_1D_1K_1M_1} = \frac{3R^2\sqrt{3}}{8}$. Из $\Delta A_1OO_1$ по

теореме Пифагора $OO_1 = = \sqrt{A_1O^2 - A_1O_1^2}$; $OO_1 = \sqrt{R^2 - \frac{R^2}{4}} = \frac{R\sqrt{3}}{2}$. Найдем

$V_{ус.пир.} = \frac{1}{3}OO_1(S + S_1 + \sqrt{S\cdot S_1})$.

$$V_{ус.пир.} = \frac{1}{3}\cdot\frac{R\sqrt{3}}{2}\left(\frac{3R^2\sqrt{3}}{2} + \frac{3R^2\sqrt{3}}{8} + \sqrt{\frac{3R^2\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{3R^2\sqrt{3}}{8}}\right) =$$

$$= \frac{R\sqrt{3}}{6}\left(\frac{3R^2\sqrt{3}}{2} + \frac{3R^2\sqrt{3}}{8} + \frac{3R^2\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{21R^3}{16}.$$ (*Ответ*: $\frac{21R^3}{16}$.)

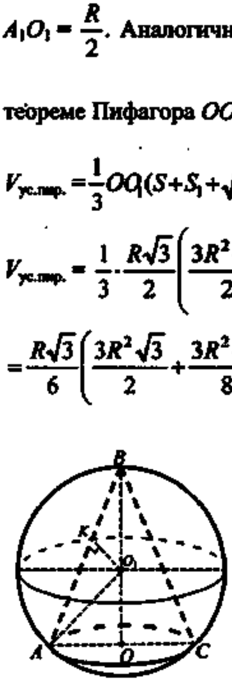


*Рис. 9*

**Карточка 6**

*Дано*: в шар вписан конус, $S_{ABC} = S$, $\angle ABO = \alpha$ (рис. 9).

*Найти*: $V_{шара}$.

*Решение*: $AB = BC$, $\angle ABC = 2\alpha$, $S_{ABC} = \frac{1}{2}AB^2\sin\beta$, $AB = \sqrt{\frac{2S}{\sin 2\alpha}}$, $AK = KB$. Из $\Delta O_1KB$

по определению косинуса угла $\cos\beta = \frac{KB}{BO_1}$,

$BO_1 = \frac{KB}{\cos\angle B}$, $BO_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2S}{\sin 2\alpha}} : \cos\alpha$, $BO_1 = \frac{\sqrt{2S}}{2\cos\alpha\sqrt{\sin 2\alpha}} = \frac{\sqrt{2S\sin 2\alpha}}{2\cos\alpha\sin 2\alpha}$.

$V_{шара} = \frac{4}{3}\pi\cdot O_1B^3$, $V_{шара} = \frac{4}{3}\pi\cdot\left(\frac{\sqrt{2S\sin 2\alpha}}{2\cos\alpha\sin 2\alpha}\right)^3 = \frac{4}{3}\pi\frac{2S\sin 2\alpha\sqrt{2S\sin 2\alpha}}{8\cos^3\alpha\sin^3 2\alpha} =$

$= \frac{\pi S\sqrt{2S\sin 2\alpha}}{3\cos^3\alpha\sin^2 2\alpha}$. (*Ответ*: $\frac{\pi S\sqrt{2S\sin 2\alpha}}{3\cos^3\alpha\sin^2 2\alpha}$.)

**IV. Самостоятельное решение задач**

***Задача № 757*** (рис. 10).

*Рис. 10*

*Решение*: из $\Delta OCB$ по теореме косинусов $CB^2 = OC^2 + OB^2 - OC \cdot OB\cos(180° - \alpha)$, $\ell^2 = 2CO^2 + 2CO^2\cos\alpha$, $\ell^2 = 2CO^2(1 + \cos\alpha)$, $CO = \sqrt{\dfrac{\ell^2}{2(1+\cos\alpha)}}$. Применяя формулу половинного угла и извлекая арифметический квадратный корень, получим $CO = \dfrac{\ell}{2\cos(\alpha/2)}$. $CO = R$, где $R$ – радиус шара. Тогда $V = \dfrac{4}{3}\pi\dfrac{\ell^3}{8\cos^3(\alpha/2)} = \dfrac{\pi\ell^3}{6\cos^3(\alpha/2)}$. (*Ответ*: $\dfrac{\pi\ell^3}{6\cos^3(\alpha/2)}$.)

***Наводящие вопросы:***

– почему $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$?
– почему $CO = OB$?
– почему извлекали арифметический квадратный корень?

***Задача № 759*** (рис. 11).

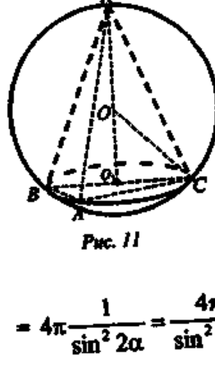


*Рис. 11*

*Решение*: $OB_1 = O_1C = 1$ (см). Из $\Delta KO_1C$ по определению тангенса угла $\text{tg}\alpha = \dfrac{KO_1}{O_1C}$, $KO_1 = \text{tg}\alpha$. Пусть $KO = R$, тогда $OO_1 = KO_1 - KO$, $OO_1 = \text{tg}\alpha - R$. Из $\Delta OCO_1$ по теореме Пифагора $OC^2 = OO_1^2 + O_1C^2$, $R^2 = (\text{tg}\alpha - R)^2 + 1$, $R^2 = R^2 - 2R\text{tg}\alpha + \text{tg}^2\alpha + 1$, $2R\text{tg}\alpha = \text{tg}^2\alpha + 1$, $R = \dfrac{\text{tg}^2\alpha + 1}{2\text{tg}\alpha}$, $R = \dfrac{1}{\sin 2\alpha}$.

$= 4\pi\dfrac{1}{\sin^2 2\alpha} = \dfrac{4\pi}{\sin^2 2\alpha}$, $V_{шара} = \dfrac{4}{3}\pi R^3$, $V_{шара} = \dfrac{4}{3}\pi\dfrac{1}{\sin^3 2\alpha} = \dfrac{4\pi}{3\sin^3 2\alpha}$.

(*Ответ*: $S_{сферы} = \dfrac{4\pi}{\sin^2 2\alpha}$; $V_{шара} = \dfrac{4\pi}{3\sin^3 2\alpha}$.)

***Задача № 760*** (рис. 12).

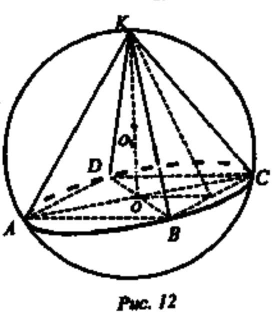


*Рис. 12*

*Решение*: Из $\Delta KO_1C$ по определению тангенса угла $\text{tg}\beta = \dfrac{KO_1}{O_1C}$, $KO_1 = 5\text{tg}\beta$. Пусть $KO = R$, тогда $OO_1 = KO_1 - KO$. $OO_1 = 5\text{tg}\beta - R$. Из $\Delta OO_1C$ по теореме Пифагора $OC^2 = OO_1^2 + O_1C^2$, $R^2 = (5\text{tg}\beta - R)^2 + 5^2$, $R^2 = 25\text{tg}^2\beta - 10\text{tg}\beta \cdot R + R^2 + 25$, $R = \dfrac{5}{\sin 2\beta}$.

$S_{сферы} = 4\pi R^2$, $S_{сферы} = 4\pi\frac{25}{\sin^2 2\beta} = \frac{100\pi}{\sin^2 2\beta}$, $V_{шара} = \frac{4}{3}\pi R^3$, $V_{шара} = \frac{4}{3}\pi\frac{125}{\sin^3 2\beta} = \frac{500\pi}{3\sin^3 2\beta}$. (*Ответ*: $S_{сферы} = \frac{100\pi}{\sin^2 2\beta}$; $V_{шара} = \frac{500\pi}{3\sin^3 2\beta}$.)

***Дополнительная задача***

Около правильной треугольной призмы, высота которой вдвое больше стороны ее основания, описан шар. Найдите отношение объема шара к объему призмы.

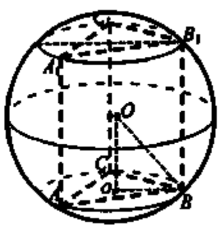


*Рис. 13*

*Дано*: около призмы описан шар, $AB = BC = AC$, $BB_1 = 2AB$ (рис. 13).

*Найти*: $\frac{V_{шара}}{V_{ABCA_1B_1C_1}}$.

*Решение*: пусть $AB = a$, тогда $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}a^2\sin 60° = \frac{1}{2}a^2\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. $BB_1 = 2AB$; $BB_1 = 2a$. Найдем $V_{призмы} = S_{осн.} \cdot BB_1$; $V_{призмы} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot 2a = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. $OO_1 = \frac{1}{2}AA_1 = a$. $O_1B$ – радиус описанной окружности около $\Delta ABC$ (равносторонний), поэтому $O_1B = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Из $\Delta OO_1B$ по теореме Пифагора $OB = \sqrt{OO_1^2 + O_1B^2}$, $OB = \sqrt{\frac{a^2}{3} + a^2} = \frac{2a}{\sqrt{3}} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$. $V_{шара} = \frac{4}{3}\pi(OB)^3$, $V_{шара} = \frac{4}{3}\pi\frac{8a^3}{3\sqrt{3}} = \frac{32\pi a^3\sqrt{3}}{27}$. $\frac{V_{шара}}{V_{ABCA_1B_1C_1}} = \frac{32\pi a^3\sqrt{3}}{27}\cdot\frac{2}{a^3\sqrt{3}} = \frac{64\pi}{27}$. (*Ответ*: $\frac{64\pi}{27}$.)

**V. Подведение итогов**

---

**Домашнее задание**

Задачи № 748, 749.

***Дополнительная задача.***

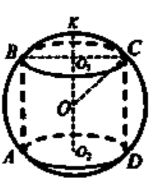


*Рис. 14*

В шар радиуса 6 см вписан цилиндр. Найдите объем цилиндра, если плоскости его основания делят поверхность шара на три равные по площади части (рис. 14).

*Решение*: $S_{сегм.верх.} = S_{слоя} = S_{нижн.сегм.}$ $S_{сегм.} = 2\pi \cdot OC \cdot KO_1 = 12\pi \cdot O_1K$; $S_{слоя} = 2\pi \cdot OC \cdot O_1O_2 = 12\pi(6 - O_1K)$, тогда $12\pi \cdot O_1K = 12\pi(6 - O_1K)$, $O_1K = 6 - O_1K$; $O_1K = 3$ (см); $OO_1 = 6 - 3 = 3$ (см). Из $\Delta OO_1C$ по теореме Пифагора

$O_1C=\sqrt{OC^2-OO_1^2}$, $O_1C=\sqrt{6^2-3^2}=3\sqrt{3}$ (см). $O_1O_2=O_1O+OO_2$; $O_1O_2=6$ (см).

$V_{цил.}=\pi O_1C\cdot O_1O_2$, $V_{цил.}=\pi\cdot 3\sqrt{3}\cdot 6=18\pi\sqrt{3}$ (см³). (*Ответ*: $18\pi\sqrt{3}$ (см³).)

## Урок 68. Повторение по теме: «Комбинации с вписанными сферами»

*Цели урока:*

- систематизировать теоретические знания о комбинациях тел;
- научить учащихся решать задачи на комбинации с вписанными сферами.

### Ход урока

**I. Организационный момент**

**II. Актуализация знаний учащихся**

**Проверка домашнего задания.**

***Задача № 748*** **(рис. 1).**

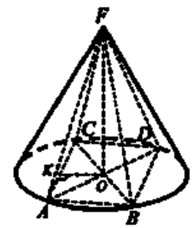



*Рис. 1*

*Решение*: $AK=AD=\frac{a}{2}$. Из $\Delta AOK$ по определению синуса угла $\sin\frac{\varphi_1}{2}=\frac{AK}{OA}$, $OA=\frac{AK}{\sin\varphi_1/2}$,

$OA=\frac{a}{2\sin\varphi_1/2}=R$ – радиус основания конуса, $\frac{OK}{AO}=\cos\frac{\varphi_1}{2}$,

$OK=OA\cos\varphi_1/2=$

$\frac{a}{2\sin\varphi_1/2}\cdot\cos\frac{\varphi_1}{2}=\frac{a\operatorname{ctg}\varphi_1/2}{2}$. Из $\Delta FOK$ по определению котангенса угла $\frac{OK}{OF}=\operatorname{ctg}\varphi_2$,

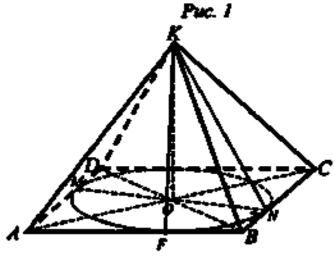



*Рис. 2*

$OF=\frac{OK}{ctg\varphi_2}=\frac{a\operatorname{ctg}\varphi_1/2}{2\operatorname{ctg}\varphi_2}$.

$V_{конуса}=\frac{1}{3}S_{осн.}\cdot H$, $V_{конуса}=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{a}{2\sin\varphi_1/2}\right)^2\cdot\frac{a\operatorname{ctg}\varphi_1/2}{a\operatorname{ctg}\varphi_2}=\frac{\pi a^3\operatorname{tg}\varphi_2}{24\sin^2\varphi_1/2\cdot\operatorname{tg}\varphi_1/2}$.

(*Ответ*: $\frac{\pi a^3\operatorname{tg}\varphi_2}{24\sin^2\varphi_1/2\cdot\operatorname{tg}\varphi_1/2}$.)

***Задача № 749*** (рис. 2).

*Решение*: $S_{ABCD} = AB^2\sin A = a^2\sin\varphi$, $S_{ABCD} = BC \cdot MN$, $MN = \dfrac{S_{ABCD}}{BC} = \dfrac{a^2\sin\varphi}{a} = = a\sin\varphi$. $ON = OM = R = \dfrac{a\sin\varphi}{2}$. Из $\Delta KON$ по определению тангенса $\operatorname{tg}\Theta = \dfrac{KO}{ON}$, $KO = ON \cdot \operatorname{tg}\Theta = \dfrac{a\sin\varphi}{2}\operatorname{tg}\Theta$. $V_{\text{конуса}} = \dfrac{1}{3}S_{\text{осн.}} \cdot H$. $V_{\text{конуса}} = \dfrac{1}{3}\pi\dfrac{a^2\sin^2\varphi}{4}\cdot\dfrac{a\sin\varphi}{2}\operatorname{tg}\Theta = \dfrac{\pi a^3\sin^3\varphi\operatorname{tg}\Theta}{24}$.

(*Ответ*: $\dfrac{\pi a^3\sin^3\varphi\operatorname{tg}\Theta}{24}$.)

**Пока идет проверка домашнего задания провести индивидуальную работу по карточкам (см. приложение).**

***Ответы:***

**I уровень: $24R^2$; $8R^3$.**

**II уровень: $100\pi$; $\dfrac{500\pi}{3}$.**

**III уровень: $36\pi$; $36\pi$.**

***Решение карточек***

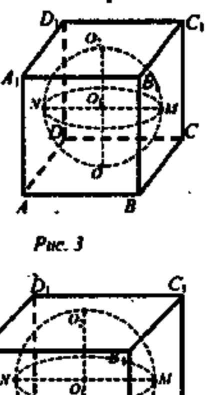



*Рис. 3*

**Карточка 1**

*Дано*: шар вписан в параллелепипед, $OO_1 = R$ (рис. 3).

*Найти*: $S_{\text{полн.}}$

*Решение*: Так как шар вписан, то $OO_2 = MN$, значит $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб. $AB = 2R$, тогда $S_{\text{полн.}} = 6S_{ABCD}$; $S_{\text{полн.}} = 6 \cdot 2R \cdot 2R = 24R^2$.

(*Ответ*: $24R^2$.

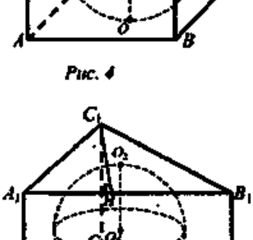



*Рис. 4*

**Карточка 2**

*Дано*: шар вписан в призму, $AB = BC$, $O_1M = R$ (рис. 4).

*Найти*: $V_{\text{призмы}}$.

*Решение*: Так как шар вписан в призму, то эта призма будет являться кубом со стороной $2R$. $V_{\text{призмы}} = S_{ABCD} \cdot BB_1$, $V_{\text{призмы}} = 2R \cdot 2R \cdot 2R = 8R^3$.

(*Ответ*: $8R^3$.)

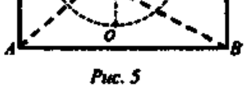



*Рис. 5*

**Карточка 3**

*Дано*: $ABCA_1B_1C_1$ – призма, $\angle ACB = 90°$, $AB = 25$, $C_1H = 12$, сфера вписана в призму (рис. 5).

*Найти*: $S_{\text{сферы}}$.

*Решение*: $C_1H = \sqrt{A_1H \cdot HB_1}$, по свойству высоты, проведенной из вершины прямого угла

$12^2 = A_1H \cdot (25 - A_1H)$, $144 = 25A_1H - A_1H^2$,

$A_1H^2 - 25A_1H + 144 = 0$, $D = 625 - 576 = 49$,

$A_1H=\dfrac{25-7}{2}=9$ или $A_1H=\dfrac{25+7}{2}=16$. Тогда $HB_1=16$ или $HB_1=9$. Найдем радиус окружности, вписанной в $\Delta A_1B_1C_1$, который будет являться радиусом сферы. $r=\dfrac{2S_{\Delta A_1B_1C_1}}{A_1C_1+A_1B_1+B_1C_1}$. Из $\Delta C_1HB_1$ по теореме Пифагора $C_1B_1= \; =\sqrt{12^2+16^2}=20$, из $\Delta A_1C_1H: A_1C_1=\sqrt{9^2+12^2}=15$. $S_{\Delta A_1B_1C_1}=\frac{1}{2}A_1C_1\cdot B_1C_1$, $S_{\Delta A_1B_1C_1}=\frac{1}{2}\cdot 15\cdot 20=150$. $P_{\Delta A_1B_1C_1}=A_1B_1+A_1C_1+C_1B_1$, $P_{\Delta A_1B_1C_1}=15+20+\;+25=60$. $r=\dfrac{2\cdot 150}{60}=5$. Найдем $S_{сферы}$. $S_{сферы}=4\pi r^2$, $S_{сферы}=4\pi\cdot 5^2=100\pi$. (*Ответ*: $100\pi$.)

**Карточка 4**

*Дано*: шар вписан в прямую призму, $\angle ACB=90°$, $AC=15$ см, $A_1H=9$ см (рис. 6).

*Найти*: $V_{шара}$.

*Решение*: Из $\Delta A_1C_1H$ по теореме Пифагора $C_1H=\sqrt{A_1C_1^{\;2}-A_1H^2}$, $C_1H=\sqrt{15^2-9^2}=12$. $C_1H=\sqrt{A_1H\cdot HB_1}$, $HB_1=\dfrac{C_1H^2}{A_1H}$ по свойству

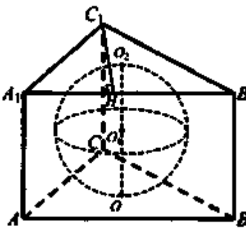


*Рис. 6*

высоты, проведенной из вершины прямого угла, $HB_1=\dfrac{144}{9}=16$, тогда $A_1B_1=25$. $C_1B_1=\sqrt{A_1B_1\cdot HB_1}$, $C_1B_1=\sqrt{25\cdot 16}=5\cdot 4=20$. $S_{\Delta A_1B_1C_1}=$ $=\frac{1}{2}A_1C_1\cdot B_1C_1$, $S_{\Delta A_1B_1C_1}=\frac{1}{2}\cdot 15\cdot 20=150$. $P_{\Delta A_1B_1C_1}=15+20+25=60$. Найдем радиус окружности, вписанной в $\Delta A_1B_1C_1$, который будет являться радиусом сферы $r=\dfrac{2S}{P}$, $r=\dfrac{2\cdot 150}{60}=5$. $V_{шара}=\dfrac{4}{3}\pi r^3$, $V_{шара}=\dfrac{4}{3}\pi\cdot 125=$ $=\dfrac{500\pi}{3}$. (*Ответ*: $\dfrac{500\pi}{3}$.)

**Карточка 5**

*Дано*: шар вписан в прямую призму, $ABCD$ – трапеция, $\angle ABC=\angle BAD=90°$, $BC=4$ см, $AD=12$ см (рис. 7).

*Найти*: $S_{сферы}$

*Решение*: Найдем радиус окружности, вписанной в трапецию $ABCD$, который будет являться радиусом сферы. Пусть $AB=x$, тогда $CK=x$, $KD=AD-AK$, $KD=12-4=8$ (см). Из

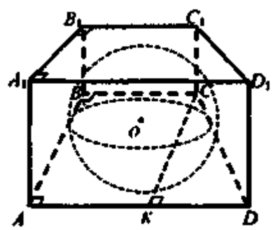


*Рис. 7*

$\Delta CKD$ по теореме Пифагора найдем $CD$: $CD=\sqrt{CK^2+KD^2}$, $CD=\sqrt{x^2+64}$. Так как в трапецию вписана окружность, то $AB+CD=AD+BC$. Составим и решим уравнение $x+\sqrt{x^2+64}=12+4$, $\sqrt{x^2+64}=16-x$, уравнение равносильно системе: $\begin{cases}16-x\ge 0,\\ x^2+64=(16-x)^2;\end{cases}$ $\begin{cases}x\le 16,\\ x^2+64=256-32x+x^2;\end{cases}$ $\begin{cases}x\le 16,\\ 32x=192;\end{cases}$

$\begin{cases}x\le 16\\ x=6.\end{cases}$ Значит, $AB=6$, но $AB$ – диаметр вписанной окружности, следовательно, $r=3$ см. $S_{сферы}=4\pi r^2$, $S_{сферы}=4\pi\cdot 9=36\pi$ (см$^2$). (*Ответ*: $36\pi$ см$^2$.)

**Карточка 6**

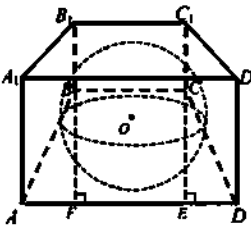


*Рис. 8*

*Дано*: шар вписан в прямую призму, $ABCD$ – трапеция, $AB=CD$, $BC=2$ см, $AD=18$ см (рис. 8).

*Найти*: $S_{сферы}$.

*Решение*: Опустим из вершин $B$ и $C$ перпендикуляры к $AD$. $FE=2$ см, тогда $AF=ED=8$ см. Так как окружность вписана в трапецию (ее радиус будет равен радиусу сферы), то $AB+CD=AD+BC$, но $AB=CD$, $2AB=2+18$, $AB=10$ см. По теореме Пифагора из $\Delta ABF$ найдем $BF$: $BF=\sqrt{AB^2-AF^2}$, $BF=\sqrt{10^2-8^2}=6$ (см), $BF$ – диаметр, значит $r=3$ см. Найдем $S_{сферы}$. $S_{сферы}=4\pi r^2$, $S_{сферы}=4\pi\cdot 9=$ $=36\pi$ (см$^2$). (*Ответ*: $36\pi$.)

## III. Самостоятельное решение задач

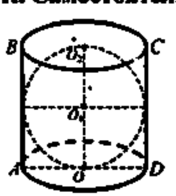


*Рис. 9*

***Задача № 750*** (рис. 9).

***Решение***: пусть $AO=R$, тогда $AB=2R$. $V_{цилиндра}=$ $=S_{осн.}\cdot AB$, $V_{цилиндра}=\pi R^2\cdot 2R=2\pi R^3$. $V_{шара}=\dfrac{4}{3}\pi R^3$.

$\dfrac{V_{цилиндра}}{V_{шара}}=\dfrac{2\pi R^3}{\dfrac{4}{3}\pi R^3}=1{,}5$. (*Ответ*: 1,5.)

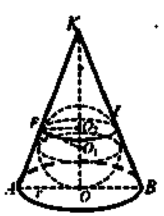


*Рис. 10*

***Задача № 752*** (рис. 10).

***Решение***: из $\Delta AOK$ по теореме Пифагора $OK=$ $=\sqrt{AK^2-AO^2}$, $OK=\sqrt{l^2-r^2}$. $AF=AO$ – как отрезки касательных, проведенных из одной точки. $\Delta AKO\sim\Delta FKO_2$ ($\angle AOK=\angle O_1FK=90°$, $\angle AKO$ – общий) по первому признаку подобия треугольников. Из подобия треугольников следует $\dfrac{AO}{FO_2}=\dfrac{AK}{FK}=\dfrac{KO}{KO_2}$, $\dfrac{r}{O_2F}=\dfrac{l}{l-r}$,

$FO_2 = \dfrac{r(l-r)}{l}$. Найдем длину $l_1$ линии, по которой сфера касается конуса.

$l_1 = 2\pi \cdot FO_2$, $l_1 = 2\pi \dfrac{r(l-r)}{l} = \dfrac{2\pi r(l-r)}{l}$. (*Ответ*: $\dfrac{2\pi r(l-r)}{l}$.)

*Наводящий вопрос*

– Почему $\angle KFO_1 = 90°$.

***Задача № 753*** (рис. 11).

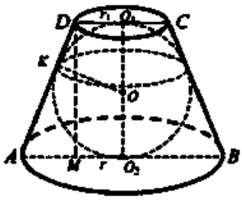


*Рис. 11*

*Решение*: $S = \pi r^2$ – площадь нижнего основания, $S_1 = \pi r_1^2$ – площадь верхнего основания. $AO_2 = AK = r$, $DO_1 = DK = r_1$ – как отрезки касательных, проведенных из одной точки. Тогда $AD = r + r_1$, $AM = AO_2 - MO_2 = AO_2 - DO_1 = r - r_1$. Из $\Delta AMD$ по теореме Пифагора $DM = \sqrt{AD^2 - AM^2}$; $DM = \sqrt{(r+r_1)^2 - (r-r_1)^2} = 2\sqrt{rr_1}$, тогда $OO_2 = \sqrt{rr_1}$.

Найдем отношение объема усеченного конуса к объему шара.

$$\frac{V_{\text{ус.конуса}}}{V_{\text{шара}}} = \frac{\frac{1}{3}DM(S+S_1+\sqrt{SS_1})}{\frac{4}{3}\pi OO_2^3} = \frac{\frac{1}{3}2\sqrt{rr_1}(\pi r^2 + \pi r_1^2 + \sqrt{\pi r_1^2 \cdot \pi r^2})}{\frac{4}{3}\pi(\sqrt{rr_1})^3} =$$

$$= \frac{2\sqrt{rr_1}\pi(r^2 + r_1^2 + r_1 r)}{4\pi rr_1\sqrt{rr_1}} = \frac{r^2 + r_1^2 + rr_1}{2rr_1}.$$ (*Ответ*: $\dfrac{r^2 + r_1^2 + rr_1}{2rr_1}$.)

***Дополнительная задача*** (относится к третьему уровню).

В полушар вписан цилиндр, причем одно из оснований цилиндра лежит в плоскости диаметрального круга полушара, а высота цилиндра вдвое меньше радиуса полушара. Найдите отношение объема цилиндра к объему полушара.

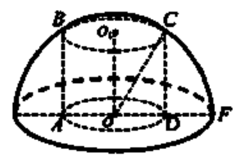


*Рис. 12*

*Решение*: пусть $OF = 2R$, тогда $CD = R$. Из $\Delta OCD$ по теореме Пифагора найдем $OD$, $OD = \sqrt{OC^2 - CD^2}$, $OD = \sqrt{(2R)^2 - R^2} = R\sqrt{3}$. $V_{\text{цилиндра}} = \pi \cdot OD^2 \cdot CD$, $V_{\text{цилиндра}} = \pi \cdot 3R^2 \cdot R = 3\pi R^3$.

$V_{\text{полушара}} = \dfrac{1}{2}\dfrac{4}{3}\pi \cdot OK^3$. $V_{\text{полушара}} = \dfrac{2}{3}\pi \cdot (2R)^3 = \dfrac{16\pi R^3}{3}$. $\dfrac{V_{\text{цилиндра}}}{V_{\text{полушара}}} = \dfrac{3\pi R^3 \cdot 3}{16\pi R^3} = \dfrac{9}{16}$.

(*Ответ*: $\dfrac{9}{16}$.)

**IV. Подведение итогов года**

# ПРИЛОЖЕНИЕ

## Урок 3. Координаты вектора. Самостоятельная работа

### *Вариант А 1*

*1.* *Даны* векторы $\vec{a}\{2;-4;3\}$ и $\vec{b}\{-3;\frac{1}{2};1\}$. *Найдите* координаты вектора $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$.

*2.* *Даны* векторы $\vec{a}\{1;-2;0\}$, $\vec{b}\{3;-6;0\}$ и $\vec{c}\{0;-3;4\}$ *Найдите* координаты вектора $\vec{p}=2\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{b}-\vec{c}$.

*3.* *Найдите* значения $m$ и $n$, при которых вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, если $\vec{a}\{6;n;1\}$ и $\vec{b}\{m;16;2\}$.

### *Вариант А 2*

*1.* *Даны* векторы $\vec{a}\{2;-4;3\}$ и $\vec{b}\{-3;\frac{1}{2};1\}$. *Найдите* координаты вектора $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$.

*2.* *Даны* векторы $\vec{a}\{1;-2;0\}$, $\vec{b}\{3;-6;0\}$ и $\vec{c}\{0;-3;4\}$. *Найдите* координаты вектора $\vec{p}=\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}-2\vec{c}$.

*3.* *Найдите* значения $m$ и $n$, при которых вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, если $\vec{a}\{-4;m;2\}$ и $\vec{b}\{2;-6;n\}$.

### *Вариант Б 1*

*1.* *Даны* векторы $\vec{a}\{1;-3;-1\}$ и $\vec{b}\{-1;2;0\}$. *Найдите* координаты вектора $\vec{c}=3\vec{a}-\vec{b}$.

*2.* *Даны* векторы $\vec{a}\{2;4;-6\}$, $\vec{b}\{-9;-3;6\}$ и $\vec{c}\{3;0;-1\}$. *Найдите* координаты вектора $\vec{p}=\frac{1}{2}\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c}$.

*3.* *Даны* векторы $\vec{a}\{1;-2;0\}$ и $\vec{b}\{-2;0;4\}$. *Найдите* значение $m$ и $n$, при которых векторы $3\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}$ и $\vec{c}\{8;m;n\}$ коллинеарны.

***Вариант Б 2***

1. *Даны* векторы $\vec{a}\{1;-3;-1\}$ и $\vec{b}\{-1;2;0\}$. *Найдите* координаты вектора $\vec{c}=\vec{a}+2\vec{b}$.
2. *Даны* векторы $\vec{a}\{2;4;-6\}$, $\vec{b}\{-9;-3;6\}$ и $\vec{c}\{3;0;-1\}$. *Найдите* координаты вектора $\vec{p}=\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{b}+2\vec{c}$.
3. *Даны* векторы $\vec{a}\{1;-2;0\}$ и $\vec{b}\{-2;0;4\}$. *Найдите* значение $m$ и $n$, при которых векторы $2\vec{a}-3\vec{b}$ и $\vec{c}\{m;8;n\}$ коллинеарны.

***Вариант В 1***

1. *Даны* векторы $\vec{a}\{4;-3;5\}$ и $\vec{b}\{-3;1;2\}$. *Найдите* координаты вектора $\vec{c}=2\vec{a}-3\vec{b}$.
2. *Даны* векторы $\vec{a}\{2;-1;0\}$, $\vec{b}\{-3;2;1\}$ и $\vec{c}\{1;1;4\}$. *Найдите* координаты вектора $\vec{p}=\frac{1}{2}\vec{a}+3\vec{b}-2\vec{c}$.
3. *Даны* векторы $\vec{a}\{2;-4;0\}$ и $\vec{b}\{3;-1;-2\}$. *Найдите* значение $m$ и $n$, при которых векторы $\frac{1}{2}\vec{a}-3\vec{b}$ и $\vec{c}\{m+n;-3;m-n\}$ коллинеарны.

***Вариант В 2***

1. *Даны* векторы $\vec{a}\{4;-3;5\}$ и $\vec{b}\{-3;1;2\}$. *Найдите* координаты вектора $\vec{c}=3\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$.
2. *Даны* векторы $\vec{a}\{2;-1;0\}$, $\vec{b}\{-3;2;1\}$ и $\vec{c}\{1;1;4\}$. *Найдите* координаты вектора $\vec{p}=3\vec{a}+2\vec{b}-4\vec{c}$.
3. *Даны* векторы $\vec{a}\{2;-4;0\}$ и $\vec{b}\{3;-1;-2\}$. *Найдите* значение $m$ и $n$, при которых векторы $2\vec{a}-3\vec{b}$ и $\vec{c}\{m+n;m-n;2\}$ коллинеарны.

## Урок 5. Простейшие задачи в координатах. Контролирующая самостоятельная работа

***Уровень А***

***Вариант I***

1. Векторы $\vec{a}$ и $\overrightarrow{AB}$ равны. *Найдите* координаты точки $A$, если $\vec{a}(-1;2;4)$ $B(2;0;5)$.
2. *Даны* векторы $\vec{a}=4\vec{i}-3\vec{j}$; $\vec{b}\{-3;1;2\}$. *Найдите* координаты вектора $\vec{c}$, если $\vec{c}=2\vec{a}-3\vec{b}$.
3. *Найдите* значения $m$ и $n$, при которых векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, если $\vec{a}\{1;-2;m\}$, $\vec{b}\{n;6;3\}$.

*Вариант II*

1. Векторы $\vec{a}$ и $\overrightarrow{AB}$ равны. *Найдите* координаты точки $B$, если $\vec{a}\{2; -3; 1\}$ $A(1; 4; 0)$.
2. *Даны* векторы $\vec{a} = -\vec{i} + 2\vec{k}$; $\vec{b}\ \{2; 6; -4\}$. *Найдите* координаты вектора $\vec{c}$, если $\vec{c} = \frac{1}{2}\vec{b} - 2\vec{a}$.
3. *Найдите* значения $m$ и $n$, при которых векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, если $\vec{a}\ \{2; m; 1\}$, $\vec{b}\ \{4; -2; n\}$.

---

### *Уровень Б*

*Вариант I*

1. *Даны* точки $A\ (2; -1; 0)$; $B\ (-3; 2; 1)$; $C\ (1; 1; 4)$. *Найдите* координаты точки $D$, если векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ равны.
2. *Даны* векторы $\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j}$ и $\vec{b}\ \{-2; 0; 4\}$. *Найдите* значения $m$ и $n$, при которых векторы $\vec{p} = 3\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$ и $3\vec{c}\ \{8; m; n\}$ коллинеарны.
3. *Докажите*, что точки $A$; $B$ и $C$ лежат на одной прямой, и определите, какая из них лежит между двумя другими, если $A\ (6; -1; 0)$, $B\ (0; 3; -2)$, $C\ (3; 1; -1)$.

---

*Вариант II*

1. *Даны* точки $A\ (2; -1; 0)$; $B\ (-3; 2; 1)$; $C\ (1; 1; 4)$. *Найдите* координаты точки $D$, если векторы $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{DB}$ равны.
2. *Даны* векторы $\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j}$ и $\vec{b}\ \{-2; 0; 4\}$. *Найдите* значения $m$ и $n$, при которых векторы $\vec{p} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$ и $\vec{c}\ \{m; 8; n\}$ коллинеарны.
3. *Докажите*, что точки $A$; $B$ и $C$ лежат на одной прямой, и определите, какая из них лежит между двумя другими, если $A\ (0; 0; -1)$, $B\ (5; -3; 1)$, $C\ (-5; 3; -3)$.

---

### *Уровень В*

*Вариант I*

1. *Даны* точки $A\ (2; -1; 0)$, $B\ (-3; 2; 1)$, $C\ (1; 1; 4)$. *Найдите* координаты точки $D$, если $\overrightarrow{CD} = -2\overrightarrow{AB}$.
2. *Даны* векторы $\vec{a} = 2\vec{i} - 4\vec{k}$ и $\vec{b}\ \{3; -1; -2\}$. *Найдите* значения $m$ и $n$, при которых векторы $\vec{p} = \frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b}$ и $\vec{c}\ \{m + n; -3; m - n\}$ коллинеарны.
3. *Определите*, лежат ли в одной плоскости точки $A\ (1; 1; 1)$, $B\ (-1; 0; -1)$, $C\ (0; 2; 2)$, $D\ (2; 0; 0)$.

*Вариант II*

1. *Даны* точки $A(2; -1; 0)$, $B(-3; 2; 1)$, $C(1; 1; 4)$. *Найдите* координаты точки $D$, если $\overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{AD}$.
2. *Даны* векторы $\vec{a} = 2\vec{i} - 4\vec{k}$ и $\vec{b}\{3; -1; -2\}$. *Найдите* значения $m$ и $n$, при которых векторы $\vec{p} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$ и $\vec{c}\{m+n; m-n; 2\}$ коллинеарны.
3. *Определите*, лежат ли в одной плоскости точки $A(1; 0; -1)$, $B(-2; -1; 0)$, $C(0; -2; -1)$, $D(1; 5; 0)$

## Урок 6. Простейшие задачи в координатах

### Индивидуальная дифференцированная работа на карточках

*I уровень (карточка № 1)*

1. *Даны* векторы $\vec{a} = 4\vec{i} - 3\vec{j}$; $\vec{b}\{-3; 1; 2\}$. *Найти:* координаты вектора $\vec{c}$, если $\vec{c} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$.
2. *Найти:* значения $m$ и $n$, при которых $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, если $\vec{a}\{1; -2; m\}$, $\vec{b}\{n; 6; 3\}$. *Сравнить* длины и направления векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

*II уровень (карточка № 2)*

1. Вершины куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ имеют координаты $A(3; -1; 1)$ $B(-1; -1; 1)$, $C(-1; 3; 1)$, $C_1(-1; 3; 5)$. *Найти:* координаты вершины $B_1$ и $D_1$. *Разложить* по координатным векторам вектор $\overrightarrow{A_1C}$.
2. *Докажите*, что точки $A$, $B$ и $C$ лежат на одной прямой: $A(6; -1; 0)$, $B(0; 3; -2)$, $C(3; 1; -1)$.

*III уровень (карточка № 3)*

1. *Даны:* точки $A(2; -1; 0)$, $B(-3; 2; 1)$, $C(1; 1; 4)$. *Найти:* координаты точки $D$, если $\overrightarrow{CD} = -2\overrightarrow{AB}$.
2. *Определить:* лежат ли в одной плоскости точки $A(1; 1; 1)$, $B(-1; 0; -1)$, $C(0; 2; 2)$, $D(2; 0; 0)$.

### Математический диктант

*Вариант I*

1. На каком расстоянии от плоскости $(xOy)$ находится точка $A(2; -3; -5)$.
2. На каком расстоянии от начала координат находится точка $A(-3; 4; 0)$.
3. Найдите координаты середины отрезка, если его концы имеют координаты $A(5; 3; 2)$, $B(3; -1; -4)$.
4. *Найти* длину вектора $\overrightarrow{AB}$, если $A(5; 3; 2)$, $B(3; -1; -4)$.
5. *Записать* координаты вектора $\vec{a}$, если $\vec{a} = 4\vec{i} - 3\vec{k}$.

*Вариант II*

1. На каком расстоянии от плоскости *(yOz)* находится точка $B(-3; 2; -4)$.
2. На каком расстоянии от начала координат находится точка $B(3; 0; -4)$.
3. *Найдите* координаты середины отрезка, если концы его имеют координаты $A(-3; 2; -4)$, $B(1; -4; 2)$.
4. *Найти* длину вектора $\overrightarrow{BA}$, если $A(-3; 2; -4)$, $B(1; -4; 2)$.
5. *Записать* координаты вектора $\vec{b}$, если $\vec{b} = 5\vec{j} + \vec{i}$.

## Урок 7. Простейшие задачи в координатах. Контрольная работа № 1

### *I уровень*

*Вариант I*

1. *Найдите* координаты вектора $\overrightarrow{AB}$, если $A(5; -1; 3)$, $B(2; -2; 4)$.
2. *Даны* векторы $\vec{b}\ \{3; 1; -2\}$ и $\vec{c}\ \{1; 4; -3\}$. *Найдите* $|2\vec{b} - \vec{c}|$.
3. *Изобразить* систему координат *Oxyz* и построить точку $A(1; -2; -4)$. *Найти* расстояние от этой точки до координатных плоскостей.

*Вариант II*

1. *Найдите* координаты вектора $\overrightarrow{CD}$, если $C(6; 3; -2)$, $D(2; 4; -5)$.
2. *Даны* векторы $\vec{a}\ \{5; -1; 2\}$ и $\vec{b}\ \{3; 2; -4\}$. *Найти:* $|\vec{a} - 2\vec{b}|$.
3. Изобразить систему координат *oxyz* и построить точку $B(-2; -3; 4)$. *Найти* расстояние от этой точки до координатных плоскостей.

### *II уровень*

*Вариант I*

1. Вершины $\Delta ABC$ имеют координаты $A(-2; 0; 1)$, $B(-1; 2; 3)$, $C(8; -4; 9)$. *Найдите* координаты вектора $\overrightarrow{BM}$, если $BM$ – медиана $\Delta ABC$.
2. *Дан* вектор $\vec{a}\ \{-6; 4; 12\}$. *Найти* координаты $\vec{b}$, если $|\vec{b}| = 7$ и векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправлены.
3. *Даны* точки $A(-1; 5; 3)$ $B(7; -1; 3)$ $C(3; -2; 6)$. *Доказать*, что $\Delta ABC$ – прямоугольный.

*Вариант II*

1. Вершины $\Delta ABC$ имеют координаты: $A(-1; 2; 3)$, $B(1; 0; 4)$, $C(3; -2; 1)$. *Найдите* координаты вектора $\overrightarrow{AM}$, если $AM$ – медиана $\Delta ABC$.
2. *Дан* вектор $\vec{a}\ \{-6; 4; 12\}$. *Найдите* координаты $\vec{b}$, если $|\vec{b}| = 28$ и векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ противоположно-направлены.
3. *Даны* точки $A(-1; 5; 3)$, $B(-1; 3; 9)$, $C(3; -2; 6)$. *Доказать*, что $\Delta ABC$ – прямоугольный.

*III уровень*

***Вариант I***

1. Середины сторон $\Delta ABC$ имеют координаты: $M(3; -2; 5)$. $N(3{,}5; -1; 6)$. $K(-1{,}5; 1; 2)$. *Найдите* координаты вершин $\Delta ABC$.
2. *Даны* точки $A(-2; 1; 2)$, $B(-6; 3; -2)$ на оси аппликат. *Найти* точку $C$, равноудаленную от точек $A$ и $B$.
3. *Найти* площадь $\Delta ABC$.

***Вариант II***

1. Середины сторон $\Delta ABC$ имеют координаты: $M(3; -2; -4)$. $N(-6; 4; -10)$. $K(-7; 2; -12)$. *Найдите* координаты вершин $\Delta ABC$.
2. *Даны* точки $A(4; 5; 4)$, $B(2; 3; -4)$ на оси абсцисс *Найти* точку $C$, равноудаленную от точек $A$ и $B$.
3. *Найти* площадь $\Delta ABC$.

## Урок 9. Угол между векторами. Скалярное произведение векторов

### Математический диктант

***Вариант I***

1. *Дан* квадрат $ABCD$. *Найдите* угол между векторами $\overline{AC}$ и $\overline{DA}$.
2. *Найдите* скалярный квадрат вектора $7\vec{i}$.
3. *Найдите* скалярное произведение $\vec{a}\ \vec{b}$, если $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$, $(\widehat{\vec{a}\,\vec{b}}) = 120°$.
4. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб, ребро которого равно 1. *Найдите* скалярное произведение векторов $\overline{AD_1}$ и $\overline{BC}$.
5. *Вычислите* скалярное произведение $\vec{a}\ \vec{b}$, если $\vec{a}\ \{1; 2; 3\}$, $\vec{b}\ \{-1; -2; -3\}$.

***Вариант II***

1. *Дан* квадрат $ABCD$. *Найдите* угол между векторами $\overline{CA}$ и $\overline{BC}$.
2. *Найдите* скалярный квадрат вектора $6\vec{j}$.
3. *Найдите* скалярное произведение $\vec{a}\ \vec{b}$, если $|\vec{a}| = 6$, $|\vec{b}| = 4$, $(\widehat{\vec{a}\,\vec{b}}) = 135°$.
4. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб, ребро которого равно 1. Найдите скалярное произведение векторов $\overline{BA_1}$ и $\overline{CD}$.
5. *Вычислите* скалярное произведение $\vec{a}\ \vec{a}$, если $\vec{a}\ \{2; -1; 3\}$, $\vec{b}\ \{-2; 2; 3\}$.

## Урок 13. Решение задач по теме «Движения»

### Самостоятельная работа

*I уровень*

***Вариант I***

1. *Докажите*, что центральная симметрия есть движение.
2. *Дан* тетраэдр $MABC$. *Постройте* фигуру, центрально-симметричную этому тетраэдру относительно точки $O$.

***Вариант II***

1. *Докажите*, что зеркальная симметрия есть движение.
2. *Дан* тетраэдр *MABC*. *Постройте* фигуру, зеркально симметричную этому тетраэдру относительно плоскости $\beta$.

---

***II уровень***

***Вариант I***

1. *Докажите*, что осевая симметрия есть движение.
2. *Даны* точки (1; 2; 3), (0; –1; 2), (1; 0; –3). *Найдите* точки, симметричные данным относительно координатных плоскостей.

---

***Вариант II***

1. *Докажите*, что параллельный перенос есть движение.
2. *Даны* точки (1; 2; 3), (0; –1; 2), (1; 0; –3). *Найдите* точки, симметричные им относительно начала координат.

---

***III уровень***

***Вариант I***

1. $A$ (3; 1; –4). Точка $B$ симметрична точке $A$ относительно плоскости $xoy$, а точка $C$ симметрична точке $B$ относительно оси $Oy$. *Найдите* расстояние между точками $A$ и $C$.
2. При параллельном переносе точка $M$ (–3; 2; –5) переходит в точку $M_1$ (1; –3; –2). *Найдите* сумму координат точки $K_1$, в которуюпереходит при этом параллельном переносе точка $K$ (1; –2; –5).

---

***Вариант II***

1. $B$ (–2; 5; 3). Точка $C$ симметрична точке $B$ относительно плоскости $xOz$, а точка $D$ симметрична точке $C$ относительно оси $Oz$. *Найдите* расстояние между точками $B$ и $D$.
2. При параллельном переносе точка $A$ (–2; 3; 5) переходит в точку $A_1$ (1; –1; 2). *Найдите* сумму координат точки $B_1$, в которую переходит при этом параллельном переносе точка $B$ (–4; –3; 1).

---

## Урок 14. Контрольная работа № 5.2 по теме «Скалярное произведение векторов в пространстве. Движения»

### Контрольная работа № 5.2

---

***I уровень***

***Вариант I***

1. *Даны* векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, причем $\vec{a} = 6\vec{i} - 8\vec{k}$, $|\vec{b}| = 1$, $(\vec{a}\ \vec{b}) = 60°$. *Найти*: а) $\vec{a} \cdot \vec{b}$; б) значение $m$, при котором векторы $\vec{a}$ и $\vec{c}$ (4; 1; $m$) перпендикулярны.
2. *Найдите* угол между прямыми $AB$ и $CD$, если $A$ (3, –1, 3), $B$ (3, –2, 2), $C$ (2, 2, 3) и $D$ (1, 2, 2).
3. *Дан* правильный тетраэдр $DABC$ с ребром $a$. При симметрии относительно плоскости $ABC$ точка $D$ перешла в точку $D_1$. *Найдите* $DD_1$.

***Вариант II***

1. *Даны* векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, причем $\vec{a} = 4\vec{j} - 3\vec{k}$, $|\vec{b}| = \sqrt{2}$, $(\vec{a}\ \vec{b}) = 45°$. *Найдите*: а) $\vec{a} \cdot \vec{b}$; б) значение $m$, при котором векторы $\vec{a}$ и $\vec{c}$ $(2, m, 8)$ перпендикулярны.
2. *Найдите* угол между прямыми $AB$ и $CD$, если $A(1, 1, 2)$, $B(0, 1, 1)$, $C(2, -2, 2)$ и $D(2, -3, 1)$.
3. *Дан* правильный тетраэдр $DABC$ с ребром $a$. При симметрии относительно точки $D$ плоскость $ABC$ перешла в плоскость $A_1B_1C_1$. *Найдите* расстояние между этими плоскостями.

***II уровень***

***Вариант I***

1. *Вычислите* скалярное произведение векторов $\vec{m}$ и $\vec{n}$, если $\vec{m} = \vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c}$, $\vec{n} = 2\vec{a} - \vec{b}$, $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, $(\vec{a}\ \vec{b}) = 60°$, $\vec{c} \perp \vec{a}$, $\vec{c} \perp \vec{b}$.
2. *Дан* куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. *Найдите* угол между прямыми $AD_1$ и $BM$, где $M$ – середина ребра $DD_1$.
3. *Дан* куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром $a$. При симметрии относительно плоскости $CC_1D$ точка $B_1$ перешла в точку $B_2$. *Найдите* $AB_2$.

***Вариант II***

1. *Вычислите* скалярное произведение векторов $\vec{m}$ и $\vec{n}$, если $\vec{m} = 2\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$, $\vec{n} = \vec{a} - 2\vec{b}$, $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$, $(\vec{a}\ \vec{b}) = 60°$, $\vec{c} \perp \vec{a}$, $\vec{c} \perp \vec{b}$.
2. *Дан* куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. *Найдите* угол между прямыми $AC$ и $DC_1$.
3. *Дан* куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром $a$. При симметрии относительно прямой $B_1D_1$ точка $D$ перешла в точку $D_2$. *Найдите* $BD_2$.

***III уровень***

***Вариант I***

1. *Даны* векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, причем $|\vec{a}| = 6$, $|\vec{b}| = 3$, $(\vec{a}\ \vec{b}) = 120°$. *Найдите* $|\vec{a} + 2\vec{b}|$.
2. В пирамиде $DABC$ ребра $DA$, $DB$ и $DC$ взаимно перпендикулярны и равны $a$. Используя векторы, *найдите* угол между плоскостями $DAB$ и $ABC$.
3. При движении прямая $a$ отображается на прямую $a_1$, а плоскость $\alpha$ – на плоскость $\alpha_1$. *Доказать*, что если $a \parallel \alpha$, то $a_1 \parallel \alpha_1$.

***Вариант II***

1. *Даны* векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, причем $|\vec{a}| = 7$, $|\vec{b}| = \sqrt{2}$, $(\vec{a}\ \vec{b}) = 135°$. *Найдите* $|\vec{a} - 3\vec{b}|$.
2. В пирамиде $DABC$ ребра $DA$, $DB$ и $DC$ взаимно перпендикулярны и равны $a$. Используя векторы, *найдите* угол между прямой $DA$ и плоскостью $ABC$.
3. При движении прямая $b$ отображается на прямую $b_1$, а плоскость $\beta$ – на плоскость $\beta_1$. *Докажите*, что если $b \perp \beta$, то $b_1 \perp \beta_1$.

## Урок 15. Зачет по теме «Метод координат в пространстве»

**Выполнение работы (по карточкам)**

**Карточка 1**

1. *Расскажите*, как задается прямоугольная система координат в пространстве и как определяются координаты вектора.
2. *Выведите* формулы, выражающие координаты точки пересечения медиан треугольника через координаты его вершин.
3. № 1. *Даны* векторы $\vec{a}$ (4; 1; –2) и $\vec{b}$ (3; $m$; 2). Определить значения $m$, при которых угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ является: а) острым; б) прямым; в) тупым.

   № 2. *Даны* векторы $\vec{a}$ (–2; 3; 1) и $\vec{b}$ (1; 4; –3). *Определить*, при каких значениях $k$ угол между векторами $\vec{a}+k\vec{b}$ и $\vec{b}$ а) острый; б) прямой; в) тупой.

   № 3. Вершины $\Delta ABC$ имеют координаты $A$ ($m$; –3; 2), $B$ (9; –1; 3), $C$ (12; –5; –1). *Определите* значения $m$, при которых угол $C$ треугольника тупой.

**Карточка 2**

1. *Расскажите* о связи между координатами векторов и координатами точек.
2. *Выведите* формулы, выражающие координаты середины отрезка через координаты его концов.
3. № 1. *Найдите* угол между прямыми $AB$ и $CD$, если $A$ (1; 1; 2), $B$ (0; 1; 1), $C$ (2; –2; 2), $D$ (2; –3; 1).

   № 2. *Вычислите* угол между прямыми $AB$ и $CD$, если $A$ (1; 1; 0), $B$ (3; –1; 2), $D$ (0; 1; 0).

   № 3. *Дан* куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Используя метод координат, *найдите* угол между прямыми $AB_1$ и $A_1D$.

**Карточка 3**

1. Сформулируйте определение скалярного произведения двух векторов. Сформулируйте условие перпендикулярности двух ненулевых векторов, используя скалярное произведение.
2. Выведите формулу для вычисления длины вектора по его координатам.
3. № 1. *Даны* точки $A$ (–3; 1; 2) и $B$ (1; –1; –2). *Найдите*: а) координаты середины отрезка $AB$; б) координаты и длину вектора $\overrightarrow{AB}$; в) координаты точки $C$, если $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB}$.

   № 2. *Даны* точки $A$ (0; 4; 0), $B$ (2; 0; 0), $C$ (4; 0; 4) и $D$ (2; 4; 4). *Докажите*, что $ABCD$ – ромб.

   № 3. *Даны* точки $A$ (0; 1; 2), $B$ ($\sqrt{2}$; 1; 2), $C$ ($\sqrt{2}$; 2; 1) и $D$ (0; 2; 1). *Докажите*, что $ABCD$ – квадрат.

**Карточка 4**

1. *Сформулируйте* основные свойства скалярного произведения векторов. *Докажите* некоторые из этих свойств.
2. *Выведите* формулу для вычисления расстояния между точками с заданными координатами.
3. **№ 1.** *Даны* точки $A(2; 1; -8)$, $B(1; -5; 0)$, $C(8; 1; -4)$. *Докажите*, что $\Delta ABC$ – равнобедренный и найдите длину средней линии треугольника, соединяющей середины боковых сторон.

   **№ 2.** *Даны* координаты трех вершин параллелограмма $ABCD$: $A(-6; -4; 0)$, $B(6; -6; 2)$, $C(10; 0; 4)$. *Найдите* координаты точки $D$ и угол между векторами $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$.

   **№ 3** *Даны* точки $A(2; 5; 8)$ и $B(6; 1; 0)$. *Найдите*: а) на оси ординат точку $C$, равноудаленную от точки $A$ и $B$; б) площадь треугольника $ABC$.

---

**Карточка 5**

1. *Докажите*, что центральная и осевые симметрии являются движениями.
2. *Выведите* формулы косинуса угла между ненулевыми векторами с заданными координатами.
3. **№ 1.** *Найдите* скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если: а) $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = \sqrt{3}$, $(\vec{a}\ \vec{b}) = 30°$; б) $\vec{a}\ (2; -3; 1)$; $\vec{b} = 3\vec{i} + 2\vec{k}$.

   **№ 2.** *Даны* векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. *Найдите* $\vec{b}\cdot(\vec{a}+\vec{b})$, если $\vec{a}\ (-2; 3; 6)$, $\vec{b} = 6\vec{i} - 8\vec{k}$.

   **№ 3.** *Даны* векторы $\vec{a}\ \{1; 2; -1\}$, $\vec{b}\ \{-3; 1; 4\}$, $\vec{c}\ \{3; 4; -2\}$ и $\vec{d}\ \{2; -1; 3\}$. *Вычислите* скалярное произведение $(\vec{a} + 2\vec{b})\cdot(\vec{c} - \vec{d})$.

---

**Карточка 6**

1. *Докажите*, что зеркальная симметрия и параллельный перенос являются движениями.
2. *Расскажите*, как вычислить угол между двумя прямыми в пространстве с помощью направляющих векторов этих прямых.
3. **№ 1.** *Даны* точки $M(-4; 7; 0)$ и $N(0; -1; 2)$. *Найдите* расстояние от начала координат до середины отрезка $MN$ (векторно-координатным способом).

   **№ 2.** *Даны* координаты вершины тетраэдра $MABC$ : $M(2; 5; 7)$, $A(1; -3; 2)$, $B(2; 3; 7)$, $C(3; 6; 0)$. *Найдите* расстояние от точки $M$ до точки $O$ пересечения медиан $\Delta ABC$.

   **№ 3.** В тетраэдр $DABC$ $DA = 5$ см, $AB = 4$ см, $AC = 3$ см, $\angle BAC = 90°$, $\angle DAB = 60°$, $\angle DAC = 45°$. *Найдите* расстояние от вершины $A$ до точки пересечения медиан треугольника $DBC$.

## Урок 18. Цилиндр. Решение задач

### Самостоятельная работа

*I уровень*

***Вариант I***

1. Радиус цилиндра равен 10 см. Сечение, параллельное оси цилиндра и удаленное от нее на 8 см, имеет форму квадрата. *Найти* площадь сечения.
2. Диагональ осевого сечения цилиндра равна $8\sqrt{2}$ дм и образует с плоскостью основания цилиндра угол 45°. *Найдите* площадь полной поверхности цилиндра.

***Вариант II***

1. Высота цилиндра равна 16 см. На расстоянии 6 см от оси цилиндра проведено сечение, параллельное оси цилиндра и имеющее форму квадрата. *Найдите* радиус цилиндра.
2. Диагональ осевого сечения цилиндра равна 8 дм и составляет с образующей угол 60°. *Найдите* площадь полной поверхности цилиндра.

*II уровень*

***Вариант I***

1. Прямоугольник вращается вокруг одной из своих сторон, равной 5 см. Площадь боковой поверхности цилиндра, полученного при вращении, равна $100\pi$ см$^2$. *Найдите* площадь прямоугольника.
2. Хорда нижнего основания цилиндра отсекает от окружности основания дугу в 120°. Отрезок, соединяющий центр верхнего основания с серединой данной хорды, равен $4\sqrt{2}$ см и образует с плоскостью основания угол 45°. *Найдите* площадь осевого сечения цилиндра.

***Вариант II***

1. Прямоугольник, одна из сторон которого равна 5 см, вращается вокруг неизвестной стороны. *Найдите* площадь прямоугольника, если площадь боковой поверхности цилиндра, полученного при вращении, равна $60\pi$ см$^2$.
2. Хорда нижнего основания цилиндра удалена от центра нижнего основания на $2\sqrt{3}$ см и отсекает от окружности основания дугу в 60°. Отрезок, соединяющий центр верхнего основания с одним из концов данной хорды, образует с осью цилиндра угол 45°. *Найдите* площадь осевого сечения цилиндра.

*III уровень*

***Вариант I***

1. Параллельно оси цилиндра, на расстоянии d от нее, проведена плоскость, отсекающая от окружности основания дугу $\alpha$. Диагональ полученного сечения составляет с образующей цилиндра угол $\beta$. *Найдите* площадь полной поверхности цилиндра.
2. Площадь осевого сечения цилиндра равна $18\sqrt{3}$ см$^2$. Отрезок, соединяющий центр верхнего основания цилиндра с точкой окружности нижнего основания образует с осью цилиндра угол 30°. *Найдите* площадь боковой поверхности цилиндра.

*Вариант II*

1. Параллельно оси цилиндра проведена плоскость, отсекающая от окружности основания дугу $\alpha$. Диагональ полученного сечения равна $l$ и образует с плоскостью основания цилиндра угол $\beta$. *Найдите* площадь полной поверхности цилиндра.
2. Периметр осевого сечения цилиндра равен 36 см. Диагональ осевого сечения составляет с образующей цилиндра угол 45°. *Найдите* площадь боковой поверхности цилиндра.

## Урок 20. Конус

### Математический диктант
(диктуется по вопросу для каждого варианта)

*Вариант I*

*1.* Какая фигура получается в сечении конуса плоскостью, проходящей через ось конуса?
*2.* Какая фигура получается в сечении цилиндра плоскостью, проходящей перпендикулярно оси цилиндра?
*3.* Что представляет собой сечение конуса плоскостью, проходящей через вершину конуса?
*4.* Чему равна площадь осевого сечения конуса, если его высота в 2 раза больше радиуса основания и равна 5 см?
*5.* Осевое сечение конуса представляет собой прямоугольный треугольник со стороной $a$. Чему равна высота конуса?

*Вариант II*

*1.* Какая фигура получается в сечении конуса плоскостью, проходящей перпендикулярно оси конуса?
*2.* Какая фигура получается в сечении цилиндра плоскостью, проходящей через ось цилиндра?
*3.* Что представляет собой сечение конуса плоскостью, параллельной двум образующим конуса?
*4.* Чему равна площадь осевого сечения конуса, если осевым сечением конуса является прямоугольный треугольник, а радиус основания конуса 3 см?
*5.* Осевое сечение конуса представляет собой равносторонний треугольник с катетом $a$. Чему равна высота конуса?

## Урок 22. Сфера. Уравнение сферы

### Самостоятельная работа

*I уровень*

*Вариант I*

Радиусы оснований усеченного конуса равны 3 см и 6 см, а высота равна 4 см. *Найдите* площадь осевого сечения и боковой поверхности конуса.

*Вариант II*

Радиус большего основания, образующая и высота усеченного конуса равны 7, 5 см и 4 см соответственно. *Найдите* площадь осевого сечения и боковой поверхности конуса.

***II уровень***

***Вариант I***

Диагональ осевого сечения усеченного конуса равна 40 см и перпендикулярна к образующей конуса, равной 30 см. *Найдите* площадь сечения и полной поверхности конуса.

***Вариант II***

Радиусы оснований усеченного конуса равны 1 дм и 7 дм, а диагонали осевого сечения взаимно перпендикулярны. *Найдите* площадь осевого сечения и полной поверхности конуса.

***III уровень***

***Вариант I***

Радиусы оснований усеченного конуса равны 16 см и 25 см. *Найдите* площадь полной поверхности конуса, если в его осевое сечение можно вписать окружность.

***Вариант II***

Диагональ осевого сечения усеченного конуса делится осью конуса на отрезки 10 см и 35 см. Образующая конуса равна 39 см. *Найдите* площадь полной поверхности конуса.

## Урок 23. Взаимное расположение сферы и плоскости

### Математический диктант

***Вариант I***

1. *Найдите* координаты центра и радиус сферы, заданной уравнением $(x-2)^2+(y+3)^2+z^2=25$.
2. *Напишите* уравнение сферы радиуса $R=7$ с центром в точке $A\,(2;\,0;\,-1)$.
3. Лежит ли $A\,(-2;\,1;\,4)$ на сфере, заданной уравнением $(x+2)^2+(y-1)^2+(z-3)^2=1$.
4. Точки $A$ и $B$ принадлежат сфере. Принадлежит ли сфере любая точка отрезка $AB$?
5. Могут ли все вершины прямоугольного треугольника с катетами 4 см и $2\sqrt{2}$ см лежать на сфере радиуса $\sqrt{5}$ см?
6. *Записать* формулу площади круга.
7. *Найти* координаты центра и радиус сферы $x^2-6x+y^2+z^2=0$.

***Вариант II***

1. *Найдите* координаты центра и радиус сферы, заданной уравнением $(x+3)^2+y^2+(z-1)^2=16$.
2. *Напишите* уравнение сферы радиуса $R=4$ с центром в точке $A\,(-2;\,1;\,0)$.
3. Лежит ли точка $A\,(5;\,-1;\,4)$ на сфере, заданной уравнением $(x-3)^2+(y+1)^2+(z-4)^2=4$.
4. Точки $A$ и $B$ принадлежат шару. Принадлежит ли этому шару любая точка отрезка $AB$?
5. Могут ли все вершины прямоугольного треугольника с катетами 4 см и $2\sqrt{2}$ см лежать на сфере радиуса $\sqrt{6}$ см?
6. *Записать* формулу длины окружности.
7. *Найти* координаты центра и радиус сферы $x^2+y^2+6y+z^2=0$.

## Урок 28. Разные задачи на многогранники, цилиндр, конус и шар

### Тест

***Вариант I***

*1.* Если сфера касается всех граней многогранника, то она называется…
а) описанной около многогранника;
б) вписанной в многогранник;
в) касательной к многограннику.

*2.* Все вершины многогранника лежат на сфере, такой многогранник называется…
а) вписанным в сферу;
б) описанным около сферы;
в) касательным к сфере.

*3.* Шар можно вписать в…
а) произвольную призму;
б) треугольную пирамиду;
в) треугольную призму.

*4.* В прямую призму, в основание которой вписана окружность, можно вписать сферу, если…
а) высота призмы равна диаметру вписанной окружности;
б) центр сферы лежит на высоте призмы;
в) высота призмы равна радиусу вписанной окружности.

*5.* Во всякий цилиндр можно вписать сферу, если…
а) центр сферы лежит на оси цилиндра;
б) сфера касается оснований цилиндра;
в) его осевое сечение – квадрат.

***Вариант II***

*1.* Если на сфере лежат все вершины многогранника, то она называется…
а) описанной около многогранника;
б) вписанной в многогранник;
в) касательной к многограннику.

*2.* Если каждая грань многогранника является касательной плоскостью к сфере, то такой многогранник называется…
а) вписанным в сферу;
б) описанным около сферы;
в) касательным к сфере.

*3.* Шар можно описать около…
а) любой призмы;
б) любой правильной пирамиды;
в) наклонной призмы.

*4.* В прямую призму вписана сфера, около призмы еще описана сфера, центры этих сфер…
а) лежат на разных диагоналях призмы;
б) принадлежат высоте призмы и не совпадают;
в) совпадают.

*5.* Около любого цилиндра можно описать сферу. Основания цилиндра являются…
а) касательными плоскостями к сфере;
б) большим кругом сферы;
в) сечениями сферы.

## Урок 29. Зачет по теме: «Тела вращения»

### Задачи к зачету

#### I уровень

***Вариант I***

1. Радиус основания цилиндра равен 5 см, а высота цилиндра равна 6 см. *Найдите* площадь сечения, проведенного параллельно оси цилиндра на расстоянии 4 см от нее.
2. Радиус шара равен 17 см. *Найдите* площадь сечения шара, удаленного от его центра на 15 см.
3. Радиус основания конуса равен 3 м, а высота 4 м. *Найти* образующую и площадь осевого сечения.

***Вариант II***

1. Высота цилиндра 8 дм, радиус основания 5 дм. Цилиндр пересечен плоскостью параллельно оси так, что в сечении получился квадрат. *Найдите* расстояние от этого сечения до оси цилиндра.
2. Радиус сферы равен 15 см. *Найдите* длину окружности сечения, удаленного от центра сферы на 12 см.
3. Образующая конуса $\ell$ наклонена к плоскости основания под углом в 30°. *Найти* высоту конуса и площадь осевого сечения.

#### II уровень

***Вариант I***

1. Осевое сечение цилиндра – квадрат, диагональ которого 4 см. *Найдите* площадь боковой поверхности цилиндра.
2. Радиус основания конуса равен 6 см, а образующая наклонена к плоскости основания под углом 60°. *Найдите* площадь сечения, проходящего через две образующие, угол между которыми равен 45° и площадь боковой поверхности конуса.
3. Диаметр шара равен $d$. Через конец диаметра проведена плоскость под углом 45° к нему. *Найдите* площадь сечения шара этой плоскостью.

***Вариант II***

1. Осевое сечение цилиндра – квадрат, площадь основания цилиндра равна 16 $\pi$ см$^2$. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.
2. Высота конуса равна 6 см, угол при вершине осевого сечения равен 90°. *Найдите* площадь боковой поверхности конуса.
3. Площадь сечения шара плоскостью, проведенной через конец диаметра под углом 30° к нему, равна $75\pi$ см$^2$. *Найдите* диаметр шара.

#### III уровень

***Вариант I***

1. Длина линии пересечения сферы и плоскости, проходящей через конец диаметра под углом 60° к нему, равна $5\pi$ см$^2$. *Найдите* диаметр сферы.
2. Через вершину конуса проведена плоскость, пересекающая основание по хорде, длина которой равна 5 см, и стягивающей дугу 90°. Плоскость сечения составляет с плоскостью основания угол 60°. *Найдите* площадь боковой поверхности конуса.
3. Плоскость, проходящая через центр нижнего основания цилиндра под углом $\alpha$ к основанию, пересекает верхнее основание по хорде, равной $b$ и стягивающей дугу $\beta$. *Найдите* высоту цилиндра.

*Вариант II*

1. Диаметр шара равен *d*. Через конец диаметра проведена плоскость под углом 30° к нему. *Найдите* длину линии пересечения сферы и плоскости.
2. В цилиндре проведена плоскость, параллельная оси и отсекающая от окружности основания дугу в 120°. Диагональ сечения равна 20 см и удалена от оси на 3 см. *Найдите* площадь боковой поверхности цилиндра.
3. В конусе проведено сечение плоскостью, проходящей через вершину конуса. *Найдите* его площадь, если радиус конуса *r*, угол между сечением и основанием 60°, угол между образующей и основанием 45°.

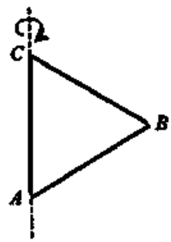
## Урок 30. Зачет по теме: «Тела вращения»

### Проведение зачета по карточкам

*I уровень*

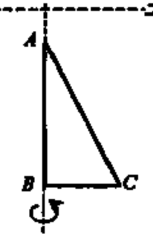
**Карточка № 1**

1. *Объясните*, какое тело называется цилиндром.
2. Какая фигура образуется при вращении $\Delta ABC$ вокруг оси (достроить). *Вычислите* полную поверхность тела вращения, которое получается в результате вращения $\Delta ABC$ вокруг его стороны $AC$, если $AC = 8$ см, $BC = 5$ см.
3. Высота конуса равна 6 см, а образующая наклонена к плоскости основания под углом в 30°. *Найдите* площадь сечения конуса плоскостью, проходящей через две образующие, угол между которыми равен 60.
4. Радиус шара равен $R$. Найдите площадь поверхности вписанного в шар куба.



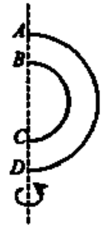

**Карточка № 2**

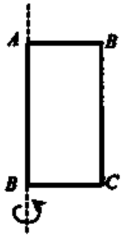
1. *Объясните*, какое тело называется конусом.
2. *Вычислите* полную поверхность тела вращения, которое получается в результате вращения $\Delta ABC$ вокруг его стороны $AB$, если $AB = 4$ см, $BC = 3$ см.
3. Радиус шара равен 8 см. Через конец радиуса, лежащего на сфере, проведена плоскость под углом 45° к радиусу. *Найдите* площадь сечения шара этой плоскостью.
4. Куб с ребром *a* вписан в цилиндр. *Найдите* площадь осевого сечения цилиндра.




**Карточка № 3**

1. *Объясните*, какое тело называется усеченным конусом.
2. *Вычислите* площадь полной поверхности тела вращения, если $AD = 8$ см, $BC = 6$ см.
3. Сечение цилиндра плоскостью, параллельной оси, отсекает от окружности основания дугу в 90°. *Найдите* площадь сечения, если высота цилиндра равна 6 см, а расстояние между осью цилиндра и секущей плоскостью равно 3 см.
4. Около шара радиуса *R* описан правильный конус. *Найдите* площадь поверхности конуса.





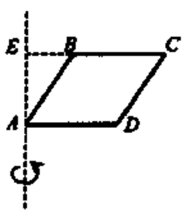

**Карточка № 4**

1. Объясните, какая поверхность называется сферой и какое тело называется шаром.
2. Вычислите полную поверхность тела вращения, которое получается в результате вращения прямоугольника вокруг его стороны $AD$, если $AB = 3$ см, $AC = 5$ см.
3. Осевое сечение цилиндра – квадрат, диагональ которого равна 12 см. *Найдите* площадь боковой поверхности цилиндра.
4. В сферу вписан конус, образующая которого равна $\ell$, а угол при вершине осевого сечения равен 60°. *Найдите* площадь сферы.

---

***II Уровень***

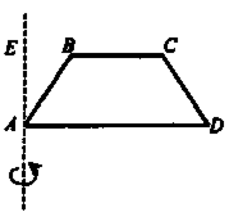
**Карточка № 1**




1. Выведите формулу площади полной поверхности цилиндра. $ABCD$ – ромб, $AB = a$, $BE = b$. *Найдите* полную поверхность тела вращения.
2. На поверхности шара выбраны точки $A$ и $B$ так, что $AB = 40$ см, а расстояние от центра шара до прямой $AB$ равно 15 см. *Найдите* площадь сечения шара, проведенного через точки $A$ и $B$ на расстоянии 7 см от центра шара.
3. Плоскость, параллельная оси цилиндра, пересекает основание цилиндра по хорде, которая видна из центра этого основания под углом α. Диагональ образовавшегося сечения наклонена к плоскости основания под углом β. Радиус цилиндра равен $R$. *Найдите*: а) площадь данного сечения; б) площадь осевого сечения.

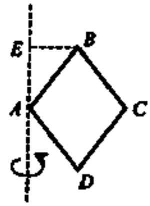
---

**Карточка № 2**



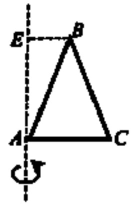

1. Выведите формулу площади полной поверхности конуса.
2. $ABCD$ – равнобокая трапеция, $AD = a$, $BC = b$, $CD = c$. *Найдите* полную поверхность тела вращения.
3. На поверхности шара выбраны точки $A$ и $B$ так, что $AB = 40$ см, а расстояние от центра шара до прямой $AB$ равно 15 см. Через точки $A$ и $B$ проведено сечение, площадь которого равна $576\pi$ см$^2$. *Найдите* расстояние от центра шара до плоскости сечения.
4. Плоскость, параллельная оси цилиндра, пересекает основание цилиндра по хорде, составляющей с диагональю данного сечения угол β. Радиус основания цилиндра, проведенный в один из концов хорды, образует с плоскостью сечения угол α. Высота цилиндра равна $H$. *Найдите*: а) площадь данного сечения; б) площадь осевого сечения.

**Карточка № 3**




1. Выведите формулу уравнения сферы.
2. $ABCD$ – ромб, $AC = a$, $BC = c$, $BE = b$. *Найдите* полную поверхность тела вращения.
3. Высота конуса равна $H$ и составляет с образующей конуса угол $\alpha$. *Найдите*: а) площадь сечения, проведенного через середину высоты конуса параллельно плоскости основания; в) площадь сечения, проведенного через две образующие, угол между которыми равен $\beta$.
4. Плоскость, параллельная оси цилиндра, пересекает его основание по хорде, стягивающей угол $\alpha$. Площадь осевого сечения цилиндра равна $S$. *Найдите* площадь образовавшегося сечения.

**Карточка № 4**




1. Выведите формулу площади полной поверхности усеченного конуса.
2. $\Delta ABC$ – равнобедренный, $AC = a$, $BC = c$, $BE = b$. *Найдите* полную поверхность тела вращения.
3. Хорда основания конуса равна $a$ и видна из центра основания под углом $\alpha$. *Найдите*: а) площадь сечения, проведенного через середину высоты конуса параллельно плоскости основания; в) площадь сечения, проведенного через данную хорду и вершину конуса, если образующая, проходящая через конец хорды, составляет с хордой угол $\beta$;
4. Сечение цилиндра, параллельное оси, имеет площадь Q и пересекает основание цилиндра по хорде, стягивающей дугу $\alpha$. *Найдите* площадь осевого сечения цилиндра.

## Урок 31. Обобщение по теме: «Цилиндр, конус, сфера и шар»

### Теоретический тест с последующей самопроверкой

***Вариант I***

*1.* Осевое сечение цилиндра – квадрат, длина диагонали которого равна 36 см. *Найдите* радиус основания цилиндра. а) 9 см; б) 8 см; в) $8\sqrt{3}$ см; г) $9\sqrt{2}$ см.

*2.* Площадь осевого сечения цилиндра $12\sqrt{\pi}$ дм$^2$, а площадь основания равна 64 дм$^2$. *Найдите* высоту цилиндра. а) $\dfrac{\pi}{2}$ дм; б) $0{,}75\pi$ дм; в) $\dfrac{5\pi}{6}$ дм; г) 3 дм.

*3.* Отрезок CD равен 25 см, его концы лежат на разных окружностях основания цилиндра. *Найдите* расстояние от отрезка CD до основания цилиндра, если его высота 7 см, а диаметр основания 26 см. а) $6\sqrt{2}$ см; б) 6 см; в) 5 см; г) $4\sqrt{3}$ см.

*4.* Высота конуса равна $4\sqrt{3}$ см, а угол при вершине осевого сечения равен 120°. *Найдите* площадь основания конуса. а) $120\sqrt{2}$ см$^2$; б) $136\pi$ см$^2$; в) $144\pi$ см$^2$; г) $24\sqrt{3}\,\pi$ см$^2$.

*5.* Радиус основания конуса равен $7\sqrt{2}$ см. *Найдите* наибольшую возможную площадь осевого сечения данного конуса. а) $54\sqrt{2}$ см$^2$; б) 35 см$^2$; в) $21\sqrt{2}$ см$^2$; г) 98 см$^2$.

*6.* Отрезок *DE* – хорда основания конуса, которая удалена от оси конуса на 9 см. *KO* – высота конуса, причем $KO = 3\sqrt{3}$ см. *Найдите* расстояние от точки *O* (центр основания конуса) до плоскости, проходящей через точки *D*, *E* и *K*. а) 4,5 см; б) $3\sqrt{2}$ см; в) $3\sqrt{3}$ см; г) 6 см.

*7.* Сфера *w* проходит через вершины квадрата CDEF, сторона которого равна 18 см. *Найдите* расстояние от центра сферы – точки O до плоскости квадрата, если радиус сферы OE образует с плоскостью квадрата угол, равный 30°. а) 4 см; б) $4\sqrt{3}$ см; в) $3\sqrt{6}$ см; г) 6 см.

*8.* Стороны треугольника *MKN* касаются шара. *Найдите* радиус шара, если $MK = 9$ см, $MN = 13$ см; $KN = 14$ см и расстояние от центра шара O до плоскости MNK равно $\sqrt{6}$ см. а) $4\sqrt{2}$ см; б) 4 см; в) $3\sqrt{3}$ см; г) $3\sqrt{2}$ см.

*Вариант II*

*1.* Радиус основания цилиндра 3, высота 8. *Найдите* диагональ осевого сечения.
*2.* Осевое сечение цилиндра – квадрат, площадь которого 12 см$^2$. *Найдите* площадь основания цилиндра. а) $\pi$ см$^2$; б) $2\pi$; в) 10 см$^2$; г) 5 см$^2$.
*3.* Площадь осевого сечения цилиндра равна 10 м$^2$, а площадь основания 5 м$^2$. *Найдите* высоту цилиндра. а) $\pi$ м; б) $2\pi$ м; в) $\sqrt{5\pi}$ м; г) $\sqrt{3\pi}$ м.
*4.* Высота конуса равна 15 см, а радиус основания равен 8 см. *Найдите* образующую конуса. а) 19 см; б) 17 см; в) 13 см; г) $13\sqrt{3}$ см.
*5.* Осевое сечение конуса – прямоугольный треугольник. *Найдите* площадь этого сечения, если радиус основания конуса равен 5 см. а) 15 см$^2$; б) 13 см$^2$; в) 19 см$^2$; г) 25 см$^2$.
*6.* Шар радиусом 41 дм пересечен плоскостью, находящейся на расстоянии 9 дм от центра. *Найдите* площадь сечения. а) $40\pi$ дм$^2$; б) $1600\pi$ дм$^2$; в) $400\pi$ дм$^2$; г) $50\pi$ дм$^2$.
*7.* *Найдите* площадь сферы, радиус которой равен 6 см. а) $144\pi$ см$^2$; б) $25\sqrt{3}\pi$ см$^2$; в) $360\pi$ см$^2$; г) $100\pi$ см$^2$.
*8.* *Вычислите* площадь круга, площадь которого равна площади сферы радиуса 5 м. а) 20 м$^2$; б) 10 м$^2$; в) 5 м$^2$; г) 15 м$^2$.

## Урок 38. Объем цилиндра

### Самостоятельная работа (20–25 мин.)

*Вариант I*

*1.* Основание прямой призмы – прямоугольный треугольник с катетом 6 см и острым углом 45°. Объем призмы равен 108 см$^3$. *Найдите* площадь полной поверхности призмы.
*2.* Осевым сечением цилиндра является квадрат, диагональ которого равна $8\sqrt{2}$ см. *Найдите* объем цилиндра.

*Вариант II*

*1.* Основанием прямой призмы является ромб со стороной 12 см и углом 60°. Меньшее из диагональных сечений призмы является квадратом. *Найдите* объем призмы.
*2.* Осевым сечением цилиндра является квадрат, диагональ которого равна $6\sqrt{2}$ см. *Найдите* объем цилиндра.

***II уровень***

*Вариант I*

*1.* Основанием прямой призмы служит треугольник со сторонами 10, 10 и 12 см. Через большую сторону нижнего основания и середину противоположного бокового ребра проведена плоскость под углом 60° к плоскости основания. *Найдите* объем призмы.
*2.* Сечение цилиндра, параллельное его оси, отсекает от окружности основания дугу в 120°. Радиус основания цилиндра равен R, а угол между диагональю сечения и осью цилиндра равен 30°. *Найдите* объем цилиндра.

***Вариант II***

*1.* Основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ служит треугольник $ABC$, у которого $AB = BC = 10$, $\angle ABC = 30°$. Через ребро $AA_1$ проведена плоскость, перпендикулярная грани $CC_1B_1B$. Диагональ сечения составляет с плоскостью основания угол в 45°. *Найдите* объем призмы.

2. Плоскость, параллельная оси цилиндра, проходит от нее на расстоянии 15 см. Диагональ получившегося сечения равна 20 см, а радиус основания цилиндра 17 см. *Найдите* объем цилиндра.

***III Уровень***

***Вариант I***

*1.* В основании прямой призмы лежит трапеция. Площади параллельных боковых граней призмы равны 8 см$^2$ и 12 см$^2$, а расстояние между ними равно 5 м. *Найдите* объем призмы.

2. В цилиндр вписана правильная четырехугольная призма, у которой диагональ равна $\alpha$ и образует с боковым ребром угол $\beta$. *Найдите* объем цилиндра.

***Вариант II***

*1.* В основании прямой призмы лежит трапеция. Объем призмы равен 40 см$^3$. Площади параллельных боковых граней равны 6 см$^2$ и 14 см$^2$. *Найдите* расстояние между ними.

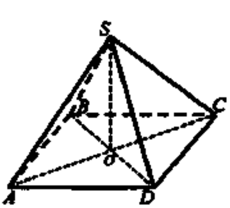
2. В цилиндр вписана правильная шестиугольная призма, большая диагональ которой равна $l$ и образует с боковым ребром угол $\alpha$. *Найдите* объем цилиндра.

## Урок 43. Объем пирамиды

**Проверочная самостоятельная работа**

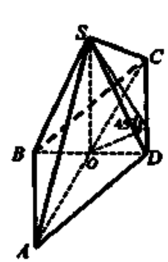
***Вариант А₁***

Основание пирамиды – прямоугольник со сторонами 6 и 8 см. *Найдите* объем пирамиды, если все ее боковые ребра равны 13 см.



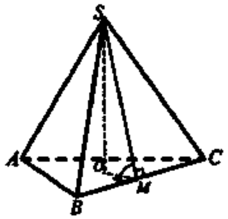

***Вариант А₂***

Основание пирамиды – ромб со стороной 10 см и высотой 6 см. *Найдите* объем пирамиды, если все двугранные углы при ее основании равны 45°.



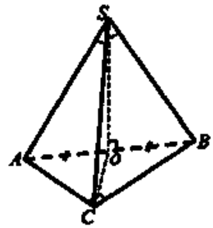
***Вариант Б₁***

Основание пирамиды – треугольник со сторонами 13, 14 и 15 см. Все двугранные углы при основании пирамиды равны 45°. *Найдите* объем.




***Вариант Б₂***

Основание пирамиды – прямоугольный треугольник с катетами 12 и 16 см. Все боковые ребра пирамиды образуют с ее высотой углы, равные 45°. *Найдите* объем.




***Вариант В₁***

Основание пирамиды – равнобедренный треугольник с углом при вершине α и радиусом описанной окружности *R*. Все боковые грани пирамиды образуют с ее высотой углы равные β. *Найдите* объем пирамиды.

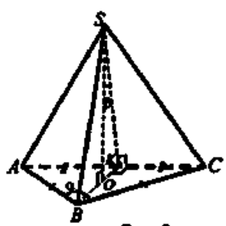



Рис. 8

***Вариант В₂***

Основание пирамиды – треугольник с углами α и β. Все боковые ребра пирамиды образуют с ее высотой углы равны j. *Найдите* объем, если расстояние от основания ее высоты до бокового ребра равно *l*.

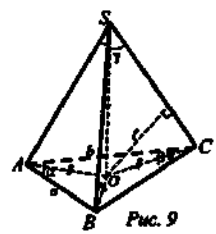



Рис. 9

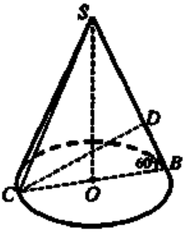
## Урок 45. Решение задач на нахождение объема конуса

### Домашняя контрольная работа

1. *Найти* объем тела, полученного вращением равнобедренного треугольника около оси *l*, проходящей через вершину основания параллельно боковой стороне. Длина боковой стороны равна *a*, угол при вершине равен α ($\alpha < \frac{\pi}{2}$).
2. Образующая конуса равна $\sqrt{6}$ см и составляет с площадью основания угол 45°. *Найдите* $V_к$.
3. Стог сена имеет форму цилиндра с коническим верхом. Радиус основания 2,5 м, высота 4 м, причем цилиндрическая часть стога имеет высоту 2,2 м. Плотность сена 0,03 г/см³. *Определите* массу стога сена.
4. По данным радиусам оснований R и r *определите* отношение объемов усеченного конуса и полного конуса.
5. Два конуса имеют концентрические основания и один и тот же угол, равный α, между высотой и образующей. Радиус основания внешнего конуса равен R. Боковая поверхность внутреннего конуса в два раза меньше полной поверхности внешнего конуса. *Найти* объем внутреннего конуса.

**Самостоятельная работа**
Решение задач по готовым чертежам.

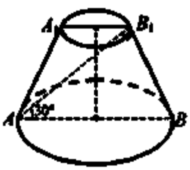
***Вариант I***




1. *Дано*: $CD \perp SB$, $CD = 6$ см, $\angle CBD = 60°$. *Найти*: $V_К$.

2. Осевым сечением конуса является равнобедренный прямоугольный треугольник, площадь которого 9 м$^2$. *Найдите* объем конуса.

***Вариант II***




1. *Дано*: $BB_1 = 6$ см, $\angle BAB_1 = 30°$, $\angle AB_1B = 90°$. *Найти*: $V_{ус.к.}$

2. Площадь осевого сечения конуса равна разности площадей оснований, а радиусы оснований $R$ и $r$. *Найдите* объем этого конуса.

## Урок 46. Контрольная работа № 4

***Вариант А 1***

1. Апофема правильной треугольной пирамиды равна 4 см, а двугранный угол при основании равен 60°. *Найдите* объем пирамиды.
2. В цилиндр вписана призма. Основанием призмы служит прямоугольный треугольник, катет которого равен $2a$, а прилежащий угол равен 30°. Диагональ большей боковой грани призмы составляет с плоскостью ее основания угол в 45°. *Найдите* объем цилиндра.

*Вариант А 2*

*1.* Боковое ребро правильной треугольной пирамиды равно 6 см и составляет с плоскостью основания угол в $60°$. *Найдите* объем пирамиды.

*2.* В конус вписана пирамида. Основанием служит прямоугольный треугольник, катет которого равен $2a$, а прилежащий угол равен $30°$. Боковая грань пирамиды, проходящая через данный катет, составляет с плоскостью основания угол в $45°$. *Найдите* объем конуса.

*Вариант Б 1*

*1.* Основание прямого параллелепипеда ромб с периметром 40 см. Одна из диагоналей ромба равна 12 см. *Найдите* объем параллелепипеда, если его большая диагональ равна 20 см.

*2.* Плоский угол при вершине правильной четырехугольной пирамиды равен $\alpha$, а боковое ребро равно $l$. *Найдите* объем конуса, вписанного в пирамиду.

*Вариант Б 2*

*1.* Основанием прямого параллелепипеда – ромб с периметром 40 см. Боковое ребро параллелепипеда равно 9, а одна из диагоналей 15 см. *Найдите* объем параллелепипеда.

*2.* Двугранный угол при основании правильной четырехугольной пирамиды равен $\alpha$. Высота пирамиды равна $H$. *Найдите* объем конуса, вписанного в пирамиду.

*Вариант В 1*

*1.* Апофема правильной четырехугольной пирамиды равна $l$ и образует с плоскостью основания пирамиды угол $\alpha$. *Найдите* объем пирамиды.

*2.* Основание прямой призмы – равнобедренный треугольник с основанием $a$ и углом при основании $\alpha$. Диагональ боковой грани, содержащей боковую сторону треугольника, наклонена к плоскости основания под углом $\beta$. *Найдите* объем цилиндра, вписанного в призму.

*Вариант В 2*

*1.* Боковое ребро правильной четырехугольной пирамиды равно $l$ и наклонено к плоскости основания пирамиды под углом $\alpha$. *Найдите* объем пирамиды.

*2.* Основание прямой призмы равнобедренный треугольник с боковой стороной $b$ и углом при основании $\alpha$. Диагональ боковой грани, содержащей основание треугольника, образует с боковым ребром угла $\beta$. *Найдите* объем цилиндра, вписанного в призму.

## Урок 50. Объем шарового сегмента, шарового слоя и шарового сектора

### Самостоятельная работа

*I уровень*

1. Шар радиуса $R$ пересечен плоскостью, отстоящей от его центра на расстоянии $\frac{R}{2}$. В каком отношении эта плоскость делит объем шара?
2. *Чему равен* объем шара, описанного около куба с ребром 2?

*II уровень*

1. Радиусы трех шаров 3, 4 и 5 см. *Найдите* радиус шара, объем которого равен сумме их объемов.
2. *Чему* равен объем шара, вписанного в куб с ребром 1?

*III уровень*

1. *Какая* фигура имеет больший объем: шар радиуса 1 дм или правильная треугольная призма, каждое ребро которой равно 2 дм?
2. Диаметр шара, равный 30 см, служит осью цилиндра, у которого радиус основания равен 12 см. *Найдите* объем части шара, заключенный внутри цилиндра.

## Урок 52. Решение задач по темам «Объем шара и его частей», «Площадь сферы». Подготовка к контрольной работе

**Тестовая самостоятельная работа с последующей проверкой ответов (на экране)**

*I уровень*

*Вариант I*

1. На расстоянии 12 см от центра шара проведено сечение, радиус которого равен 9 см. *Найдите* объем шара и площадь его поверхности.
2. Сфера радиуса 3 имеет центр в точке $O$ (4; –2; 1). Составьте уравнение сферы, в которую перейдет данная сфера при симметрии относительно плоскости $OXY$. *Найдите* объем шара, ограниченного данной сферой.

*Вариант II*

1. Через точку, лежащую на сфере, проведено сечение радиуса 3 см под углом 60° к радиусу сферы, проведенному в данную точку. *Найдите* площадь сферы и объем шара.
2. Сфера радиуса 3 имеет центр в точке $O$ (–2; 5; 3). Составьте уравнение сферы, в которую перейдет данная сфера при симметрии относительно плоскости $OXZ$. *Найдите* площадь данной сферы.

### *II уровень*

*Вариант I*

1. На расстоянии $2\sqrt{7}$ см от центра шара проведено сечение. Хорда этого сечения, равная 4 см, стягивает угол 90°. *Найдите* объем шара и площадь его поверхности.
2. Сфера с центром в точке $O$ (2; 1; –2) проходит через начало координат. Составьте уравнение сферы, в которую перейдет данная сфера при симметрии относительно оси абсцисс. *Найдите* объем шара, ограниченного полученной сферой.

---

*Вариант II*

1. На расстоянии 4 см от центра шара проведено сечение. Хорда, удаленная от центра этого сечения на $\sqrt{5}$ см, стягивает угол 120°. *Найдите* объем шара и площадь его поверхности.
2. Сфера с центром в точке $O$ (–1; –2; 2) проходит через начало координат. Составьте уравнение сферы, в которую перейдет данная сфера при симметрии относительно оси аппликат. *Найдите* площадь полученной сферы.

---

### *III уровень*

*Вариант I*

1. В шаре проведены две взаимно перпендикулярные хорды $AB = 6$ см и $AC = 8$ см. *Найдите* площадь поверхности и объем шара, если прямая $BC$ удалена от центра шара на $\sqrt{11}$ см.
2. Точки $A$ (2; –3; 1) и $B$ (–2; 1; 5) – концы диаметра сферы. Составьте уравнение сферы, в которую перейдет данная сфера при симметрии относительно плоскости $Z = 1$. *Найдите* площадь сферы.

---

*Вариант II*

1. В шаре с центром $O$ проведены две взаимно перпендикулярные хорды $AB = 6$ см и $AC = 6\sqrt{2}$ см. *Найдите* площадь поверхности, объем шара, если $\angle OBC = 30°$.
2. Точки $A$(4; –1; 2) и $B$(2; 3; 6) – концы диаметра сферы. Составьте уравнение сферы, в которую перейдет данная сфера при симметрии относительно плоскости $X = 2$. *Найдите* объем шара, ограниченного сферой.

---

*Дополнительно*

*Вариант I*

В шар вписаны равносторонний цилиндр и равносторонний конус. *Доказать*, что $V_ц = \sqrt{V_ш \cdot V_к}$.

---

*Вариант II*

Около шара описаны равносторонний цилиндр и равносторонний конус. *Доказать*, что $V_ц = \sqrt{V_ш \cdot V_к}$.

## Урок 53. Контрольная работа по темам «Объем шара» и «Площадь сферы»

### *I уровень*

***Вариант I***

1. Диаметр шара равен высоте конуса, образующая которого составляет с плоскостью основания угол $60°$. *Найдите* отношение объемов конуса и шара.
2. Объем цилиндра равен $96\pi^3$ см$^3$. Площадь его осевого сечения 48 см$^2$. *Найдите* площадь сферы, описанной около цилиндра.

***Вариант II***

1. В конус, осевое сечение которого есть правильный треугольник, вписан шар. *Найдите* отношение площади сферы к площади боковой поверхности конуса.
2. Диаметр шара равен высоте цилиндра, осевое сечение которого есть квадрат. *Найдите* отношение объемов шара и цилиндра.

### *II уровень*

***Вариант I***

1. Медный куб, ребро которого 10 см, переплавлен в шар. *Найдите* радиус шара.
2. Радиус шара равен $R$. Определите объем шарового сектора, если дуга в осевом сечении сектора равен $90°$.
3. Внешний диаметр полого шара 18 см, толщина стенок 3 см. *Найти* объем стенок.

***Вариант II***

1. Свинцовый шар, диаметр которого 20 см, переплавлен в шарики с диаметром в 10 раз меньше. *Сколько* таких шариков получилось?
2. Радиус шара равен $R$. *Определите* объем шарового сектора, если дуга в его осевом сечении равна $60°$.
3. Поверхность шара равна $225\pi$ м$^2$. *Определите* его объем.

### *III уровень*

***Вариант I***

1. Объем шара 400 см$^3$. На радиусе как на диаметре построен другой шар. *Найдите* объем малого шара.
2. Площадь поверхности куба равна площади поверхности шара. *Найдите* отношение объемов куба и шара.
3. Диагональным сечением прямоугольного параллелепипеда, вписанного в шар, является квадрат площадью S. *Найдите* объем шара.
4. Диаметр шара радиуса 12 см разделен на 3 части, длины которых относятся как $1 : 3 : 4$. Через точки деления проведены плоскости, перпендикулярные диаметру. *Найдите* объем образовавшегося шарового слоя.

*Вариант II*

1. Объем шара равен 15 см$^3$. На диаметре как на радиусе построен другой шар. *Найдите* объем большего шара.
2. Площадь поверхности прямоугольного параллелепипеда равна площади поверхности шара. *Найдите* отношение объемов параллелепипеда и шара, если ребра параллелепипеда, исходящие из одной вершины относятся как 1 : 2 : 4.
3. Диагональным сечением прямоугольного параллелепипеда, вписанного в шар, является квадрат. *Найдите* площадь этого диагонального сечения, если объем шара равен $V$.
4. Диаметр шара радиуса 9 см разделен на 3 части, длины которых относятся как 1 : 2 : 3. Через точки деления проведены плоскости, перпендикулярные диаметру. *Найдите* объем шарового слоя.

## Урок 54. Зачет по темам «Объем шара, его частей» и «Площадь сферы»

### Самостоятельное решение задач

*I уровень*

*Вариант I*

1. *Записать* формулы площади сферы, объема шара и его частей.
2. *Решить* задачи.

   *№ 1.* Объем шара равен 36π см$^3$. *Найдите* площадь сферы, ограничивающей данный шар.

   *№ 2.* В шаре радиуса 15 см проведено сечение, площадь которого равна 81 см$^2$. *Найдите* объем меньшего шарового сегмента, отсекаемого плоскостью сечения.

   *№ 3.* *Найдите* объем шарового сектора, если радиус шара равен 6 см, а высота соответствующего сегмента составляет шестую часть диаметра шара.

*Вариант II*

1. *Записать* формулы площади сферы, объема шара и его частей.
2. *Решить* задачи.

   *№ 1.* Площадь поверхности шара равна 144π см$^2$. *Найдите* объем данного шара.

   *№ 2.* На расстоянии 9 м от центра шара проведено сечение, длина окружности которого равна 24π см. *Найдите* объем меньшего шарового сегмента, отсекаемого плоскостью сечения.

   *№ 3.* *Найдите* объем шарового сектора, если радиус шара равен 6 см, а высота конуса, образующего сектор, составляет треть диаметра шара.

### *II уровень*

***Вариант I***

1. *Вывести* формулу объема шара.
2. *Решить* задачи.

**№ 1.** Внешний диаметр полого шара равен 18 см, а толщина стенок – 3 см. *Найдите* объем материала, из которого сделан шар.

**№ 2.** Сечение, перпендикулярное диаметру шара, делит этот диаметр в отношении 1 : 3. *Найдите* объем меньшего шарового сегмента, отсекаемого от шара, если площадь поверхности шара равна $144\pi$ см$^2$.

**№ 3.** Радиус шарового сектора равен $R$, а угол между радиусами в осевом сечении сектора равен 120°. *Найдите* объем сектора.

***Вариант II***

1. *Вывести* формулу объема шарового сегмента.
2. *Решить* задачи.

**№ 1.** Внутренний диаметр полого шара равен 12см, а толщина стенок – 3 см. *Найдите* объем материала, из которого сделан шар.

**№ 2.** Сечение, перпендикулярное радиусу шара, делит этот радиус пополам. Площадь поверхности шара равна $144\pi$ см$^2$. *Найдите* объем большего шарового сегмента, отсекаемого от шара.

**№ 3.** Круговой сектор радиуса R с центральным углом 60° вращается вокруг одного из радиусов, образующих этот угол. *Найдите* объем тела вращения.

### *III уровень*

***Вариант I***

1. *Доказать* теорему об объеме шара.
2. *Решить* задачи.

**№ 1.** Сечение делит поверхность сферы на части, площади которых равны $20\pi$ и $80\pi$. *Найдите* объемы этих частей.

**№ 2.** Шар радиуса 10 см цилиндрически просверлен по оси. Диаметр отверстия равен 12 см. *Найдите* объем оставшейся части шара.

**№ 3.** Радиусы оснований шарового слоя равны 3 см и 4 см, а радиус шара – 5 см. *Найдите* объем слоя, если его основания расположены по одну сторону от центра шара.

***Вариант II***

1. *Вывести* формулу площади сферы.
2. *Решить* задачи.

**№ 1.** Сечение делит объем шара на части с объемами $\frac{52\pi}{3}$ см$^3$ и $\frac{448\pi}{3}$ см$^3$. *Найдите* площади поверхностей этих частей.

**№ 2.** Радиус конуса равен 12 см, а высота – 9 см. Шар проходит через окружность основания конуса и касается его боковой поверхности. *Найдите* объем шарового сегмента, заключенного внутри конуса.

**№ 3.** Радиусы оснований шарового слоя равны 3 см и 4 см, а радиус шара – 5 см. *Найдите* объем слоя, если его основания расположены по разные стороны от центра шара.

## Урок 56. Повторение. Параллельность прямых, параллельность прямой и плоскости. Скрещивающиеся прямые. Параллельность плоскостей

### Математический диктант по темам: «Аксиомы стереометрии» и «Параллельность прямых и плоскостей»

***Вариант I***

1. В каком случае три точки в пространстве не определяют положение плоскости, проходящей через эти точки?
2. Могут ли две различные плоскости иметь только одну общую точку?
3. Точка $M$ не лежит на прямой $a$. Через точку $M$ проводятся прямые, пересекающие прямую $a$. Лежат ли эти прямые в одной плоскости?
4. Прямые $a$ и $b$ скрещиваются с прямой $c$. Могут ли прямые $a$ и $b$ пересекаться?
5. Прямая $a$ параллельна плоскости $\alpha$. Существуют ли на плоскости $\alpha$ прямые, не параллельные $a$? Если да, то каково их взаимное положение?

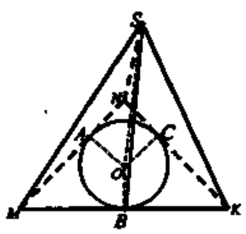
***Вариант II***

1. Что можно сказать о взаимном положении двух плоскостей, имеющих три общие точки, не лежащие на одной прямой?
2. Могут ли две различные плоскости иметь только две общие точки?
3. Прямые $a$ и $b$ пересекаются в точке $M$. Прямая $c$, не проходящая через точку $M$, пересекает прямые $a$ и $b$. Лежат ли все эти прямые в одной плоскости?
4. Прямые $a$ и $b$ скрещиваются с прямой $c$. Могут ли прямые $a$ и $b$ быть параллельными?
5. Две прямые параллельны одной и той же плоскости. Можно ли утверждать, что эти прямые параллельны между собой? Если нет, то каково их взаимное положение?

## Урок № 57. Повторение. Перпендикулярность прямой и плоскости. Теорема о трех перпендикулярах. Угол между прямой и плоскостью

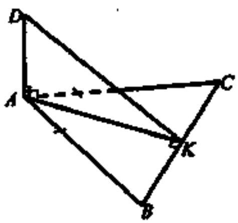
### Самостоятельная работа

***Вариант I***



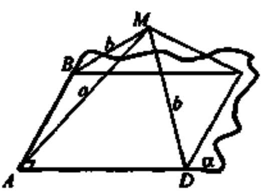

***I уровень***

Через центр вписанной в треугольник окружности проведена прямая, перпендикулярная плоскости треугольника. *Докажите*, что каждая точка этой прямой равноудалена от сторон треугольника.




*II уровень*

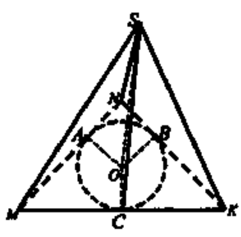
Из вершины равностороннего треугольника $ABC$ восстановлен перпендикуляр $AD$ к плоскости треугольника. *Найдите* расстояние от точки $D$ до стороны $BC$, если $AD = 13$ см, $BC = 6$ см.




*III уровень*

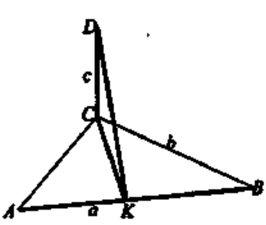
Точка $M$, лежащая вне плоскости данного прямого угла, удалена от вершины угла на расстояние $a$, а от его стороны на расстояние $b$. *Найти* расстояние от точки $M$ до плоскости угла.

*Вариант II*




*I уровень*

Расстояние от данной точки до плоскости треугольника равно 1,1 м, а до каждой из его сторон 6,1 м. *Найти* радиус окружности, вписанной в этот треугольник.

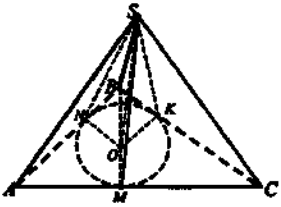



*II уровень*

Из вершины прямого угла $C$ треугольника $ABC$ восстановлен перпендикуляр $CD$ к плоскости треугольника. *Найдите* расстояние от точки $D$ до гипотенузы $\Delta ABC$, если $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$.

*III уровень*

*Дан* равнобедренный треугольник с основанием 6 см и боковой стороной 5 см. Из центра вписанного круга восстановлен перпендикуляр к плоскости треугольника длиной 2 см. *Найти* расстояние от конца этого перпендикуляра до сторон треугольника.




## Урок 60. Многогранники: параллелепипед, призма, пирамида

### Самостоятельная работа

*I уровень*

*Вариант I*

В основании правильной четырехугольной призмы лежит квадрат со стороной 4 см. Диагональ призмы образует с плоскостью основания угол 60°. *Найдите*: 1) диагональ основания призмы; 2) диагональ призмы; 3) высоту призмы; 4) площадь боковой поверхности призмы; 5) площадь полной поверхности призмы; 6) объем призмы.

*Вариант II*

В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна 12 см, а боковое ребро – 10 см. *Найдите*: 1) высоту пирамиды; 2) угол, образованный боковым ребром и плоскостью основания пирамиды; 3) угол между боковой гранью и плоскостью основания пирамиды; 4) площадь боковой поверхности пирамиды; 5) площадь полной поверхности пирамиды; 6) объем пирамиды.

*II уровень*

*Вариант I*

В основании четырехугольной призмы лежит квадрат со стороной 4 см. Диагональ призмы образует с плоскостью основания угол 60°. *Найдите*: 1) диагональ основания призмы; 2) диагональ призмы; 3) высоту призмы; 4) $S$ боковой поверхности призмы; 5) $S$ полной поверхности призмы; 6) объем призмы; 7) площадь диагонального сечения призмы; 8) площадь сечения, проходящего через середины двух противоположных сторон основания, параллельно боковой грани; 9) $S$ сечения, проходящего через середины двух смежных сторон основания параллельно диагональному сечению.

*Вариант II*

В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна 12 см, а боковое ребро – 10 см. *Найдите*: 1) высоту пирамиды; 2) угол, образованный боковым ребром и плоскостью основания пирамиды; 3) угол между боковой гранью и плоскостью основания пирамиды; 4) $S$ боковой поверхности пирамиды; 5) $S$ полной поверхности пирамиды; 6) объем пирамиды; 7) площадь сечения, проходящего через высоту пирамиды и высоту основания; 8) сечение и площадь сечения, проходящего через середину высоту пирамиды параллельно основанию.

### *III уровень*

***Вариант I***

*1.* Ребро куба равно *a*. *Найти* расстояние от вершины куба до его диагонали, соединяющей две другие вершины.
*2.* В правильной треугольной пирамиде с высотой *h* через сторону основания *a* проведена плоскость, пересекающая противоположное боковое ребро под прямым углом. *Найдите* площадь сечения.
*3.* Основание пирамиды – равнобедренный треугольник со сторонами 6 см, 6 см и 8 см. Все боковые ребра равны 9 см. *Найдите* объем.

***Вариант II***

*1.* *Найти* боковую поверхность прямоугольного параллелепипеда, если его высота *h*, площадь основания *Q*, а площадь диагонального сечения *M*.
*2.* В правильной треугольной усеченной пирамиде сторона нижнего основания – 8 м, верхнего – 5 м, высота – 3 м. Проведите сечение через сторону нижнего основания и противолежащую вершину верхнего основания. *Найдите* площадь сечения и двугранный угол между сечением и нижним основанием.
*3.* В параллелепипеде длины трех ребер, исходящих из одной вершины, равны *a, b, c*. Ребра *a* и *b* взаимно перпендикулярны, а ребро *c* образует с каждым из них угол α. *Найдите* объем параллелепипеда.

## Урок 65. Повторение по теме «Многогранники»

**Тест с последующей проверкой**

***Вариант I***

*1.* *Сколько* диагоналей у семиугольной призмы? а) 21; б) 28; в) 14; г) другой ответ.
*2.* Боковая поверхность правильной четырехугольной призмы равна 16 см$^2$, а полная поверхность – 48 см$^2$. *Найдите* высоту призмы. а) 2 см; б) 4 см; в) 1 см; г) другой ответ.
*3.* *Найдите* площадь поверхности прямоугольного параллелепипеда по трем его измерениям, равным 3 см, 4 см, 5 см. а) 94 см$^2$; б) 47 см$^2$; в) 20 см$^2$ г) другой ответ.
*4.* *Найдите* площадь сечения куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через ребро $AB$ и середину ребра $B_1C_1$, если ребро куба равно 2 см. а) 5 см$^2$; б) $4\sqrt{2}$ см$^2$; в) $2\sqrt{5}$ см$^2$; г) другой ответ.
*5.* Высота правильной четырехугольной пирамиды равна 5 см, а сторона основания – 6 см. *Найдите* боковое ребро. а) $\sqrt{43}$ см; б) $\sqrt{37}$ см; в)5 см; г) другой ответ.
*6.* *Найдите* боковую поверхность правильной треугольной пирамиды, если сторона основания равна 2 см, а все двугранные углы при основании – 30°. а) 2 см$^2$; б) $2\sqrt{3}$ см2; в) $\sqrt{3}$ см$^2$; г) другой ответ.
*7.* Высота правильной усеченной четырехугольной пирамиды равна $2\sqrt{2}$ см, а стороны основания 1 см и 4 см. *Найдите* площадь диагонального сечения.
а) 20 см$^2$; б) 10 см$^2$; в) 5 см$^2$; г) другой ответ.

*II вариант*

1. *Сколько* диагоналей у восьмиугольной усеченной пирамиды. а) 20; б) 28; в) 40; г) другой ответ.
2. Боковая поверхность правильной треугольной призмы равна $27\sqrt{3}$ см$^2$, а полная поверхность – $36\sqrt{3}$ см$^2$. *Найдите* высоту призмы. а) $3\sqrt{3}$ см; б) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ см;в) 3 см; г) другой ответ.
3. *Найдите* площадь поверхности прямоугольного параллелепипеда по трем его измерениям, равным 4 см, 4 см, 6 см. а) 92 см$^2$; б) 128 см$^2$; в) 96 см$^2$; г) другой ответ.
4. *Найдите* площадь сечения куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через ребра $AB$ и $C_1D_1$, если ребро куба равно 3 см. а) 6 см$^2$; б) $5\sqrt{2}$ см$^2$; в) $9\sqrt{2}$ см$^2$; г) другой ответ.
5. Высота правильной четырехугольной пирамиды равна 2 см, а сторона основания – 4 см. *Найдите* боковое ребро. а) $2\sqrt{3}$ см; б) $\sqrt{10}$ см; в) 3 см; г) другой ответ.
6. *Найдите* боковую поверхность правильной четырехугольной пирамиды, если сторона основания равна $2\sqrt{2}$ см, а все двугранные углы при основании – 45°. а) $8\sqrt{2}$ см$^2$; б) $16\sqrt{2}$ см$^2$; в) 8 см$^2$; г) другой ответ.
7. Высота правильной усеченной четырехугольной пирамиды равна $\sqrt{12}$ см, а стороны основания 3 см и 7 см. *Найдите* площадь диагонального сечения. а) $10\sqrt{6}$ см$^2$; б) 20 см$^2$; в) 12 см$^2$; г) другой ответ.

## Самостоятельная работа

*I уровень*

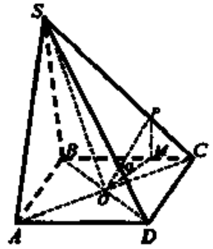
В основании пирамиды $S_{ABCD}$ лежит квадрат со стороной $a$. Боковое ребро $SB$ перпендикулярно плоскости основания. Точка $O$ – точка пересечения диагоналей основания.

На ребре $SC$ взята точка $P$ – середина этого ребра. Найдите объем пирамиды в тех случаях, когда угол между $OP$ и $AB$ равен $\alpha$.

*Дано*: $SABCD$ – пирамида. $AB = BC = DC = AD = a$. $SB \perp$ пл. $ABCD$.

$SP = PC$. $\angle POM = \alpha$.

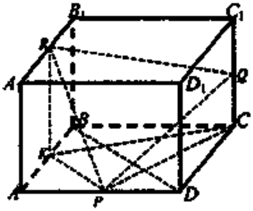
*Найти*: $V$.




На ребрах $AD$, $CC_1$ и $A_1B_1$ правильной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взяты соответственно точки $P$, $Q$, $R$ – середины этих ребер. *Найдите* объем призмы, если $AD = a$ и о треугольнике $PQR$ известно, что он:

*II уровень* – равносторонний.

*III уровень* – прямоугольный.




*Дано*: правильная призма. $A_1R = RB_1$; $C_1Q = QC$; $AP = PD$. $AB = BC = CD = AD = a$; 1) $RP = PQ = RQ$. 2) $\Delta RQP$ – прямоугольный.

*Найти*: $V$.

## Тест

***Вариант I***

1. Сколько диагоналей у девятиугольной призмы? а) 54; б) 27; в) 81; г) другой ответ.
2. Боковая поверхность правильной четырехугольной призмы равна 48 см$^2$, а полная поверхность – 56 см$^2$. *Найдите* высоту призмы. а) 2 см; б) 4 см; в) 6 см; г) другой ответ.
3. *Найдите* площадь поверхности прямоугольного параллелепипеда по трем его измерениям, равным 10 см; 2 см; 5 см. а) 120 см$^2$; б) 160 см$^2$; в) 80 см$^2$; г) другой ответ.
4. *Найдите* площадь сечения куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через ребро $AB$ и середину ребра $CC_1$, если ребро куба равно 4 см. а) 10 см$^2$; б) $8\sqrt{2}$ см$^2$; в) $4\sqrt{5}$ см$^2$; г) другой ответ.
5. Высота правильной четырехугольной пирамиды равна 1 см, а сторона основания – 4 см. *Найдите* боковое ребро. а) $2\sqrt{2}$ см; б) $2\sqrt{3}$ см; в) 3 см; г) другой ответ.
6. *Найдите* боковую поверхность правильной треугольной пирамиды, если сторона основания равна 2 см, а все двугранные углы при основании – 60°. а) $16\sqrt{3}$ см$^2$; б) $8\sqrt{3}$ см$^2$; в) 9 см$^2$; г) другой ответ.
7. Высота правильной усеченной четырехугольной пирамиды равна $\sqrt{32}$ см, а стороны основания 2 см и 8 см. *Найдите* площадь диагонального сечения. а) 40 см$^2$; б) 20 см$^2$; в) 10 см$^2$; г) другой ответ.

*II вариант*

1. Сколько диагоналей у усеченной шестиугольной пирамиды? а) 12; б) 18; в) 24; г) другой ответ.
2. Боковая поверхность правильной треугольной призмы равна 18 см$^2$, а полная поверхность – 36 см$^2$. *Найдите* высоту призмы. а) 2 см; б) $\sqrt{3}$ см; в) $\sqrt[4]{3}$ см; г) другой ответ.
3. *Найдите* площадь поверхности прямоугольного параллелепипеда по трем его измерениям, равным 6 см; 2 см; 4 см. а) 96 см$^2$; б) 48 см$^2$; в) 88 см$^2$; г) другой ответ.
4. *Найдите* площадь сечения куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через ребра $BC$ и $A_1D_1$, если ребро куба равно $2\sqrt{2}$ см. а) 8 см$^2$; б) $8\sqrt{2}$ см$^2$; в) $6\sqrt{2}$ см$^2$; г) другой ответ.
5. Высота правильной четырехугольной пирамиды равна 4 см, а сторона основания – 2 см. *Найдите* боковое ребро. а) $2\sqrt{3}$ см; б) $3\sqrt{2}$ см; в) 3 см; г) другой ответ.
6. Найдите боковую поверхность правильной четырехугольной пирамиды, если сторона основания равна 2 см, а все двугранные углы при основании – 60°. а) 8 см$^2$; б) $8\sqrt{2}$ см$^2$; в) 16 см$^2$; г) другой ответ.
7. Высота правильной усеченной четырехугольной пирамиды равна $2\sqrt{5}$ см, а стороны основания 2 см и 4 см. *Найдите* площадь диагонального сечения. а) $10\sqrt{6}$ см$^2$; б) 22 см$^2$; в) $6\sqrt{10}$ см$^2$; г) другой ответ.

## Урок 66. Повторение по теме: «Тела вращения»

### Тест с последующей проверкой по кодоскопу

*Вариант I*

1. Диагональ осевого сечения цилиндра равна $\sqrt{61}$ см, а радиус основания – 3 см. *Найдите* высоту цилиндра. а) $\sqrt{52}$ см; б) 12 см; в) 5 см; г) другой ответ.
2. Образующая конуса наклонена к плоскости основания под углом 30° и равна 8 см. *Найдите* площадь осевого сечения конуса. а) $8\sqrt{3}$ см$^2$; б) $16\sqrt{3}$ см$^2$; в) $4\sqrt{3}$ см$^2$; г) другой ответ.
3. *Найдите* расстояние от центра шара до плоскости сечения, если радиус шара равен 6 см, а радиус сечения равен $3\sqrt{3}$ см. а) $2\sqrt{3}$ см; б) 4 см; в) 3 см; г) другой ответ.
4. Радиус шаров равны 4 см и 3 см, а расстояние между их центрами 5 см. *Найдите* длину линии, по которой пересекаются их поверхности. а) 1,2 см; б) 2,4 см; в) 2 см; г) другой ответ.
5. Радиусы основания конуса равен 10 см, а высота – 15 см. *Найдите* площадь сечения конуса плоскостью, параллельной основанию и находящейся на расстоянии 2 см от его вершины. а) $\frac{16\pi}{9}$ см$^2$; б) $\frac{9\pi}{16}$ см$^2$; в) $\frac{17\pi}{10}$ см$^2$; г) другой ответ.
6. Радиусы оснований усеченного конуса равны 12 см и 6 см, а образующая наклонена к плоскости основания под углом 45°. *Найдите* высоту конуса. а) 3 см; б) 4 см; в) 6 см; г) другой ответ.
7. Правильная треугольная призма вписана в шар. *Найдите* высоту призмы, если радиус шара 4 см, а ребро основания призмы – 6 см. а) 2 см; б) 4 см; в) 8 см; г) другой ответ.

*II вариант*

1. Площадь осевого сечения цилиндра равна 12 см$^2$, а высота цилиндра – 2 см. *Найдите* радиус основания. а) $3\sqrt{2}$ см; б) 4 см; в) 3 см; г) другой ответ.
2. Образующая конуса наклонена к плоскости основания под углом 60° и равна 4 см. *Найдите* площадь осевого сечения конуса. а) $8\sqrt{3}$ см$^2$; б) $16\sqrt{3}$ см$^2$; в) $4\sqrt{3}$ см$^2$; г) другой ответ.
3. *Найдите* радиус шара, если расстояние от центра шара до плоскости сечения равно 3 см, а радиус сечения равен $\sqrt{7}$ см. а) $2\sqrt{3}$ см; б) 4 см; в) 2,5см; г) другой ответ.
4. Радиус шаров равны 4 см и 6 см, а расстояние между их центрами 5 см. *Найдите* длину линии, по которой пересекаются их поверхности. а) 10,22$\pi$ см; б) 10$\pi$ см; в) 5,11$\pi$ см; г) другой ответ.
5. Радиус основания конуса равен 7 см, а высота – 7 см. *Найдите* площадь сечения конуса плоскостью, параллельной основанию и находящейся на расстоянии 4 см от его вершины. а) 12$\pi$ см$^2$; б) 16$\pi$см$^2$; в) 8$\pi$см$^2$; г) другой ответ.
6. Радиусы оснований усеченного конуса равны $10\sqrt{3}$ см и $6\sqrt{3}$ см, а образующая наклонена к плоскости основания под углом 60°. *Найдите* высоту конуса. а) 3 см; б) 4 см; в) 6 см; г) другой ответ.
7. Правильная треугольная призма вписана в шар. *Найдите* высоту призмы, если радиус шара 6 см, а ребро основания призмы – 5 см. а) 9 см; б) $4\sqrt{89}$ см; в) $\sqrt{94}$ см; г) другой ответ.

---

## Тест в 4-х вариантах

*Вариант I*

1. *Найдите* площадь поверхности сферы, радиус которой равен $4\sqrt{3}$ дм. а) 48$\pi$ дм$^2$; б) 192$\pi$ дм$^2$; в) $60\sqrt{2}$ $\pi$дм$^2$; г) другой ответ.
2. *Найдите* боковую поверхности цилиндра с высотой, равной 3 см, если осевое сечение цилиндра плоскостью – квадрат. а) 18$\pi$; б) 9$\pi$; в) 6$\pi$; г) другой ответ.
3. Найдите боковую поверхность конуса, в осевом сечении которого равнобедренный прямоугольный треугольник с гипотенузой $6\sqrt{2}$ см. а) $9\pi\sqrt{2}$ см$^2$; б) $3\pi\sqrt{2}$ см$^2$; в) $9\pi\sqrt{3}$ см$^2$; г) другой ответ.
4. Площадь осевого сечения цилиндра равна 21 см$^2$, а площадь основания – 18$\pi$ см$^2$. *Найдите* объем цилиндра. а) 9$\pi$ см$^3$; б) 21$\pi$ см$^3$; в) 63$\pi$ см$^3$; г) другой ответ.
5. *Найдите* объем конуса, полученного вращением равностороннего треугольника со стороной $2\sqrt{6}$ см вокруг своей высоты. а) $6\sqrt{2}\pi$ см$^3$; б) $18\sqrt{2}\pi$ см$^3$; в) $12\sqrt{2}\pi$ см$^3$; г) другой ответ.
6. *Найдите* объем шарового сектора, если радиус шара равен $3\sqrt{2}$ см, а радиус окружности основания – $\sqrt{10}$ см. а) $36\pi\sqrt{2}$ см$^3$; б) $6\pi\sqrt{2}$ см$^3$; в) $12\pi\sqrt{2}$ см$^3$; г) другой ответ.
7. Радиус основания конуса равен $2\sqrt{3}$ см, а образующие наклонены к плоскости основания под углом 60°. *Найдите* боковую поверхность и объем конуса. а) 24$\pi$см$^2$ и 12$\pi$см$^3$; б) 24$\pi$см$^2$ и 24$\pi$см$^3$; в) 12$\pi$см$^2$ и 24$\pi$ см$^3$; г) другой ответ.

***Вариант II***

1. *Найдите* площадь поверхности полусферы, диаметр которой равен $2\sqrt{3}$ дм. а) $4\pi$ дм$^2$; б) $2\pi$ дм$^2$; в) $6\pi$дм$^2$; г) другой ответ.
2. Боковая поверхности цилиндра равна $48\pi$ см$^2$, радиус основания – 6 см. *Найдите* площадь осевого сечения. а) 27 см$^2$; б) 48 см$^2$; в) 36 см$^2$; г) другой ответ.
3. *Найдите* боковую поверхность конуса, осевое сечение которого равнобедренный треугольник с углом при вершине 120° и боковой стороной $6\sqrt{3}$ см. а) $18\pi\sqrt{3}$ см$^2$; б) $27\pi\sqrt{3}$ см$^2$; в) $54\pi\sqrt{3}$ см$^2$; г) другой ответ.
4. Площадь осевого сечения цилиндра равна 30 см$^2$, а площадь основания – $9\pi$ см$^2$. *Найдите* объем цилиндра. а) $23\pi$ см$^3$; б) $30\pi$ см$^3$; в) $45\pi$ см$^3$; г) другой ответ.
5. *Найдите* объем конуса, полученного вращением равнобедренного прямоугольного треугольника с гипотенузой $3\sqrt{2}$ см вокруг своего катета. а) $27\pi$ см$^3$; б) $9\pi$ см$^3$; в) $3\pi$ см$^3$; г) другой ответ.
6. *Найдите* объем шарового сектора, если радиус шара равен 5 см, а радиус окружности основания – 3 см. а) $\frac{20\pi}{3}$ см$^3$; б) $\frac{25\pi}{3}$ см$^3$; в) $\frac{50\pi}{3}$ см$^3$; г) другой ответ.
7. Радиус основания конуса равен $3\sqrt{2}$ см, а образующие наклонены к плоскости основания под углом 45°. *Найдите* боковую поверхность и объем конуса. а) $18\pi$ см$^2$ и $9\pi$ см$^3$; б) $18\sqrt{2}\,\pi$ см$^2$ и $18\sqrt{2}\,\pi$ см$^3$; в) $18\pi$ см$^2$ и $9\sqrt{2}\,\pi$ см$^3$; г) другой ответ.

***Вариант III***

1. *Найдите* площадь поверхности полусферы, радиус которой равен $2\sqrt{5}$ дм. а) $60\pi$ дм$^2$; б) $120\pi$ дм$^2$; в) $80\pi$дм$^2$; г) другой ответ.
2. *Найдите* боковую поверхность цилиндра с высотой, равной 5 см, если диагональ осевого сечения цилиндра образует с плоскостью основания угол 45°. а) $25\pi$; б) $20\,\pi$; в) $12{,}5\,\pi$; г) другой ответ.
3. *Найдите* боковую поверхность конуса, в осевом сечении которого равносторонний треугольник со стороной 6 см. а) $18\pi\sqrt{2}$ см$^2$; б) $9\pi$ см$^2$; в) $18\pi$ см$^2$; г) другой ответ.
4. Площадь осевого сечения цилиндра равна 15 см$^2$, а площадь основания – $9\pi$ см$^2$. *Найдите* объем цилиндра. а) $45\pi$ см$^3$; б) $22{,}5\pi$ см$^3$; в) $33\pi$ см$^3$; г) другой ответ.
5. *Найдите* объем фигуры, полученной вращением равностороннего треугольника со стороной $2\sqrt{6}$ см вокруг своей стороны. а) $12\sqrt{6}\,\pi$ см$^3$; б) $18\sqrt{6}\,\pi$ см$^3$; в) $24\sqrt{6}\,\pi$ см$^3$; г) другой ответ.
6. *Найдите* объем шарового сектора, если радиус шара равен 3 см, а радиус окружности основания – $\sqrt{5}$ см. а) 8 см$^3$; б) 6 см$^3$; в) 4 см$^3$; г) другой ответ.
7. Радиус основания конуса равен 2 см, а образующие наклонены к плоскости основания под углом 30°. *Найдите* боковую поверхность и объем конуса. а) $\frac{4\pi\sqrt{3}}{3}$ см$^2$ и $\frac{8\pi\sqrt{3}}{3}$ см$^3$; б) $\frac{4\pi\sqrt{3}}{3}$ см$^2$ и $\frac{4\pi\sqrt{3}}{3}$ см$^3$; в) $\frac{8\pi\sqrt{3}}{3}$ см$^2$ и $\frac{8\pi\sqrt{3}}{3}$ см$^3$; г) другой ответ.

***Вариант IV***

1. *Найдите* площадь поверхности полусферы, радиус которой равен 5 дм. а) $50\pi$ дм$^2$; б) $120\pi$ дм$^2$; в) $100\pi$ дм$^2$; г) другой ответ.
2. Боковая поверхность цилиндра равна $18\pi$ см$^2$, радиус основания – 3 *см*. *Найдите* площадь осевого сечения. а) 27 см$^2$; б) 18 см$^2$; в) 36 см$^2$; г) другой ответ.
3. *Найдите* боковую поверхность конуса, в осевом сечение которого равнобедренный прямоугольный треугольник с катетом $6\sqrt{2}$ см. а) $18\pi\sqrt{2}$ см$^2$; б) $12\pi\sqrt{2}$ см$^2$; в) $36\pi\sqrt{2}$ см$^2$; г) другой ответ.
4. Площадь осевого сечения цилиндра равна 12 см$^2$, а площадь основания – $4\pi$ см$^2$. *Найдите* объем цилиндра. а) $6\pi$ см$^3$; б) $12\pi$ см$^3$; в) $8\pi$ см$^3$; г) другой ответ.
5. *Найдите* объем фигуры, полученной вращением равнобедренного прямоугольного треугольника с гипотенузой $6\sqrt{2}$ см вокруг своей гипотенузы. а) $27\pi\sqrt{2}$ см$^3$; б) $18\pi\sqrt{2}$ см$^3$; в) $12\pi\sqrt{2}$ см$^3$; г) другой ответ.
6. *Найдите* объем шарового сектора, если радиус шара равен 10 см, а радиус окружности основания – 8 см. а) $266\frac{2}{3}$ см$^3$; б) 266 см$^3$; в) $267\frac{1}{3}$ см$^3$; г) другой ответ.
7. Радиус основания конуса равен 2 см, а образующие наклонены к плоскости основания под углом 60°. *Найдите* боковую поверхность и объем конуса. а) $8\pi$ см$^2$ и $\frac{8\pi\sqrt{3}}{3}$ см$^3$; б) $6\sqrt{2}\pi$ см$^2$ и $\frac{8\pi\sqrt{3}}{3}$ см$^3$; в) $6\pi$ см$^2$ и $\frac{8\pi\sqrt{3}}{3}$ см$^3$; г) другой ответ.

## Урок 67. Повторение по теме: «Комбинации с описанными сферами»

### Индивидуальная работа по карточкам

***I уровень***

**Карточка 1**

В конус с радиусом основания R и высотой H вписана правильная треугольная пирамида. *Найдите* боковую поверхность пирамиды.

**Карточка 2**

Около конуса с радиусом основания R и высотой H описана правильная треугольная пирамида. *Найдите* боковую поверхность пирамиды.

***II уровень***

**Карточка 3**

Высота конуса равна H, а угол при вершине его осевого сечения – $\alpha$. *Найдите* боковую поверхность правильной четырехугольной пирамиды, вписанной в данный конус.

**Карточка 4**

Образующая конуса равна $\ell$ и наклонена к плоскости основания под углом $\alpha$. Найдите боковую поверхность правильной четырехугольной пирамиды, описанной около конуса.

***III уровень***

**Карточка 5**

В шар радиуса R вписана правильная шестиугольная усеченная пирамида, у которой плоскость нижнего основания проходит через центр шара, а боковое ребро образует с плоскостью основания угол $60°$. *Найдите* объем пирамиды.

**Карточка 6**

В шар вписан конус, площадь осевого сечения которого равна S, а угол между высотой и образующей равен $\alpha$. *Найдите* объем пирамиды.

## Урок 68. Повторение по теме: «Комбинации с вписанными сферами»

**Индивидуальная работа по карточкам**

***I уровень***

**Карточка 1**

Шар радиуса R вписан в прямоугольный параллелепипед. *Найдите* площадь полной поверхности параллелепипеда.

**Карточка 2**

Шар радиуса $R$ вписан в правильную четырехугольную призму. *Найдите* объем призмы.

***II уровень***

**Карточка 3**

Основание прямой призмы – прямоугольный треугольник с гипотенузой 25 и высотой 12 см. *Найдите* площадь сферы, вписанной в призму.

**Карточка 4**

Основание прямой призмы – прямоугольный треугольник с катетом 15 см, проекция которого на гипотенузу равна 9 см. *Найдите* объем шара, вписанного в призму.

***III уровень***

**Карточка 5**

Основание прямой призмы – прямоугольная трапеция с основаниями 4 см и 12 см. *Найдите* объем шара, вписанного в данную призму.

**Карточка 6**

Основание прямой призмы – равнобедренная трапеция с основаниями 2 см и 18 см. *Найдите* площадь сферы, вписанной в данную призму.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

*Учебно-методическое пособие*

В ПОМОЩЬ ШКОЛЬНОМУ УЧИТЕЛЮ

*Составитель*
**Яровенко Виктория Александровна**

# ПОУРОЧНЫЕ РАЗРАБОТКИ ПО ГЕОМЕТРИИ

**к учебному комплекту Л.С. Атанасяна и др. (*М.: Просвещение*)**

**11 класс**

Дизайн обложки *Екатерины Бедриной*

По вопросам приобретения книг издательства «ВАКО»
обращаться в ООО «Образовательный проект»
по телефонам: 8 (495) 778-58-27, 746-15-04. Сайт: www.obrazpro.ru

Приглашаем к сотрудничеству авторов.
Телефон: 8 (495) 507-33-42. Сайт: www.vaco.ru

Налоговая льгота –
Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93-953000.
Издательство «ВАКО»
Подписано к печати с диапозитивов 26.02.2010.
Формат 84×108/32. Печать офсетная. Гарнитура Таймс.
Усл. печ. листов 17,64. Тираж 7000 экз. Заказ № 985.

Отпечатано в полном соответствии с качеством
предоставленных диапозитивов в ОАО «Дом печати — ВЯТКА»
610033, г. Киров, ул. Московская, 122
Факс: (8332) 53-53-80, 62-10-36
http://www.gipp.kirov.ru, e-mail: pto@gipp.kirov.ru